

Analyse und Inversion  
von  
Stokes-Linienprofilen  
mit  
künstlichen neuronalen Netzen  
und  
Response-Funktionen

Diplomarbeit von

Thorsten Anthony Carroll

Freie Universität Berlin

Fachbereich Physik

Berlin 2000

Analyse und Inversion  
von  
Stokes-Linienprofilen  
mit  
künstlichen neuronalen Netzen  
und  
Response-Funktionen

Diplomarbeit von

Thorsten Anthony Carroll

Betreut durch

Prof. Dr. J. Staude  
(Astrophysikalisches Institut Potsdam)

und

Prof. Dr. E. Sedlmayr  
(Technische Universität Berlin)

# Inhaltsverzeichnis

## TEIL I EINLEITUNG ..... 6

<b>1</b>	<b>ÜBERBLICK</b> .....	<b>6</b>
1.1	<i>MOTIVATION</i> .....	7
1.2	<i>EINGRENZUNG DER ARBEIT</i> .....	9
<b>2</b>	<b>GRUNDLAGEN ZUR SONNE</b> .....	<b>10</b>
2.1	<i>AUFBAU UND STRUKTUR DER SONNE</i> .....	10
2.1.1	<i>Der innere Aufbau der Sonne</i> .....	10
2.1.2	<i>Die Photosphäre</i> .....	11
2.1.3	<i>Die Chromosphäre</i> .....	12
2.1.4	<i>Die Korona</i> .....	12
2.2	<i>STRUKTUR UND EIGENSCHAFTEN VON SONNENFLECKEN</i> .....	13
2.2.1	<i>Aufbau von Sonnenflecken</i> .....	14
2.2.2	<i>Struktur des Magnetfeldes in Sonnenflecken</i> .....	15
2.2.3	<i>Entstehung von Sonnenflecken</i> .....	16

## TEIL II THEORETISCHE GRUNDLAGEN ..... 18

<b>3</b>	<b>DER POLARISIERTE STRAHLUNGSTRANSPORT</b> .....	<b>18</b>
3.1	<i>DIE STOKES-PARAMETER</i> .....	18
3.2	<i>DER ZEEMAN-EFFEKT</i> .....	20
3.3	<i>LOKALES THERMISCHES GLEICHGEWICHT (LTE)</i> .....	23
3.4	<i>LINIENPROFILE UND ABSORPTIONSKOEFFIZIENTEN</i> .....	24
3.5	<i>STRAHLUNGSTRANSPORT IM MAGNETFELD</i> .....	29
3.6	<i>FORMALE LÖSUNG DES POLARISIERTEN STRAHLUNGSTRANSPORTS</i> .....	33
<b>4</b>	<b>DAS INVERSE PROBLEM</b> .....	<b>35</b>
4.1	<i>DIE ANALYSE VON STOKES-LINIENPROFILIEN ALS INVERSES PROBLEM</i> .....	35
4.2	<i>DER LEVENBERG-MARQUARDT-ALGORITHMUS</i> .....	36
<b>5</b>	<b>RESPONSE-FUNKTIONEN FÜR STOKES-PARAMETER</b> .....	<b>39</b>
5.1	<i>DEFINITION DER RESPONSE-FUNKTIONEN</i> .....	39
5.2	<i>ABLEITUNG DER RESPONSE-FUNKTIONEN</i> .....	41

5.2.1	Die Response-Funktion der Magnetfeldstärke $B$ .....	41
5.2.2	Die Response-Funktion des Inklinationwinkels $\gamma$ .....	43
5.2.3	Die Response-Funktion des Azimutwinkels $\chi$ .....	44
<b>6</b>	<b>KÜNSTLICHE NEURONALE NETZE .....</b>	<b>46</b>
6.1	DAS BIOLOGISCHE VORBILD.....	46
6.2	STRUKTUR UND PRINZIP KÜNSTLICHER NEURONALE NETZE.....	47
6.3	FUNKTIONSPROXIMATION MIT NEURONALEN NETZEN .....	50
6.4	DER BACKPROPAGATION-ALGORITHMUS .....	52
6.5	KLASSIFIKATIONEN MIT NEURONALEN NETZEN .....	55
6.6	GENERALISIERUNG.....	58

## TEIL III ANALYSE UND INVERSION 60

<b>7</b>	<b>PHYSIKALISCHE RANDBEDINGUNGEN .....</b>	<b>60</b>
7.1	AUSWAHL GEEIGNETER INVERSIONSPARAMETER .....	60
7.2	AUSWAHL GEEIGNETER ABSORPTIONSLINIEN.....	62
7.3	MODELLATMOSPHÄREN .....	64
7.4	SYNTHETISCHE STOKES-LINIENPROFILE .....	66
<b>8</b>	<b>DIE INVERSION MIT KÜNSTLICHEN .....</b>	<b>68</b>
8.1	KONZEPTION DES ANALYSEVERFAHREN.....	68
8.2	DER STUTTGARTER NEURONALE NETZE-SIMULATOR SNNS.....	71
8.3	KLASSIFIKATION DER MODELLATMOSPHÄRE MIT NEURONALEN NETZEN.....	72
8.3.1	Auswahl und Erzeugung der Trainingsdaten .....	73
8.3.2	Datenaufbereitung.....	75
8.3.3	Training des Klassifikationsnetzwerks.....	77
8.3.4	Test und Auswertung des Klassifikationsnetzwerks .....	80
8.4	BESTIMMUNG PHYSIKALISCHER PARAMETER MIT NEURONALEN NETZEN .....	84
8.4.1	Auswahl und Erzeugung der Trainingsdaten .....	84
8.4.2	Datenaufbereitung.....	87
8.4.3	Training der Parameternetzwerke .....	88
8.4.3.1	Training des Netzwerktyps MK-MIDM .....	89
8.4.3.2	Training des Netzwerktyps MK-A.....	91
8.4.4	Tests und Bewertung der Parameternetzwerke.....	93
8.4.4.1	Auswertung des Parameternetzwerk MK-MIDM .....	93
8.4.4.2	Auswertung des Parameternetzwerks MK-A.....	101
8.5	AUSSAGEVERHALTEN FÜR GRADIENTEN .....	104
<b>9</b>	<b>DIE INVERSION AUF DER BASIS VON.....</b>	<b>106</b>
9.1	RESPONSE-FUNKTIONEN ALS PARTIELLE ABLEITUNG DER ZIELFUNKTION $\chi^2$ .....	107
9.2	BESTIMMUNG DES GRADIENTEN DES MAGNETFELDVEKTORS.....	108
9.3	DIE NUMERISCHE IMPLEMENTATION .....	111



9.4	<i>ERGEBNISSE UND BEWERTUNG</i> .....	112
10	<b>ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK</b> .....	118
10.1	<i>KLASSIFIKATION</i> .....	118
10.2	<i>INVERSION MIT KÜNSTLICHEN NEURONALEN NETZEN</i> .....	119
10.3	<i>INVERSION MIT RESPONSE-FUNKTIONEN</i> .....	121
11	<b>ANHANG</b> .....	123
11.1	<i>DIE NUMERISCHE BERECHNUNG DES EVOLUTIONS-OPERATOR</i> .....	123
12	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b> .....	126

---

# Teil I Einleitung

## 1 Überblick

Unsere Kenntnisse über die Sonne und die anderen Sterne basiert fast ausschließlich auf der Analyse der elektromagnetischen Strahlung, die von Ihnen ausgesendet wird. Auf der Grundlage einer fundierten Theorie des Strahlungstransports und der Wechselwirkung von elektromagnetischer Strahlung mit Materie vermag die Analyse von Sternenspektren eine Vielzahl von Informationen zu Tage fördern.

Gerade die Sonne bietet aufgrund ihrer Nähe zur Erde ein einzigartiges astrophysikalisches Laboratorium zur Untersuchung von unterschiedlichsten physikalischen Phänomenen, wie es bei anderen Sternen nicht möglich ist. Eine der herausragenden Eigenschaften der Sonne ist ihr Magnetfeld und dessen Einfluß und Mitwirken auf eine Vielzahl von beobachtbaren Phänomenen, wie zum Beispiel die Sonnenflecken und deren 11-jähriger Aktivitätszyklus. Nicht zuletzt auch der Einfluss der Sonnenaktivität auf das Erdklima machen so das Verständnis und das Zusammenwirken solarer Magnetfelder zu einem der Hauptforschungsschwerpunkte innerhalb der Sonnenphysik. Magnetfelder hinterlassen ihre „Spuren“ im Sonnenspektrum und bieten so einen Ansatzpunkt für deren Untersuchung. Hierbei sind es die magnetisch sensitiven Absorptionslinien im Spektrum, die durch ihre Aufspaltung und Polarisation, also den Zeeman-Effekt, einen wichtigen Beitrag zur Erschließung dieser Informationen liefern. Das Wissen um die Mechanismen der Linienentstehung in der Sonnenatmosphäre ermöglicht zumindest prinzipiell eine Analyse und Bestimmung der physikalischen Verhältnisse am Ort der Wechselwirkung von Strahlung, Materie und Magnetfeld.

Die Gewinnung von verlässlichen Magnetfeldstrukturen aus den Profilen von Absorptionslinien, also dem inversen Problem zum Strahlungstransport, stellt eine der Hauptaufgaben der hier vorliegenden Arbeit dar. Künstliche neuronale Netze, die seit Mitte der achtziger Jahre zunehmende Verbreitung in der Wissenschaft gewonnen haben, bieten gerade im Bereich der Datenanalyse ein leistungsstarkes Werkzeug, um komplexe und nichtlineare Zusammenhänge zwischen Daten zu erkennen und zu adaptieren. Zusammen mit dem Konzept der Response-Funktionen für die Stokes-Parameter, entwickelt von Landi Degl’Innocenti und Landi Degl’Innocenti (1977), soll deren Anwendbarkeit und Potential für die Bestimmung der Magnetfeldstruktur und anderer, die Profilform bestimmenden physikalischen Parameter, untersucht werden.

Nach der Beschreibung von Zielen und der Eingrenzung der Arbeit im ersten Kapitel folgt im zweiten Kapitel ein einleitender Überblick über die Struktur und den Aufbau der Sonne und der Sonnenatmosphäre. Anschließend wird kurz auf die Entstehung, Struktur und Entwicklung von Sonnenflecken eingegangen.

---

Teil 2 behandelt die theoretischen Grundlagen der Arbeit, dabei wird im Kapitel 3 der Strahlungstransport für polarisiertes Licht behandelt. Deren Beschreibung erfolgt mit Hilfe der Stokes-Parameter. Weiterhin werden für den Fall des lokalen thermischen Gleichgewichts die Linienprofile als auch die Absorptionskoeffizienten besprochen. Auf dieser Grundlage wird die formale Lösung des polarisierten Strahlungstransports von Landi Degl'Innocenti (1987) vorgestellt, durch dessen formale Beschreibung die Response-Funktionen berechnet und numerisch implementiert werden können. Kapitel 4 beschreibt die Analyse von Stokes-Linienprofilen als inverses Problem und stellt den Marquardt-Levenberg Algorithmus vor. In Kapitel 5 wird dann das Konzept der Response-Funktionen vorgestellt sowie deren Berechnung für den kompletten Magnetfeldvektor durchgeführt. Kapitel 6 beschreibt die theoretischen Grundlagen von künstlichen neuronalen Netzen mit Hinblick auf die Analyse und Klassifizierung von Spektren und Profilen.

Teil 3 widmet sich der Anwendung der in Teil 2 vorgestellten Konzepte. In Kapitel 7 werden zuerst die physikalischen Randbedingungen besprochen sowie eine Auswahl der Absorptionslinien getroffen. Weiterhin findet eine Auswahl der durch die Inversion zu bestimmenden Parameter statt. Darauf folgend werden in Kapitel 8 die Konzeption der Analyse sowie die Erstellung und das Training der künstlichen neuronalen Netzen beschrieben. Anschließend wird die Klassifikation des Temperaturmodells und die Inversion der Stokes-Linienprofile mit den trainierten neuronalen Netzen durchgeführt. Zum Abschluss findet eine Auswertung der Berechnungsergebnisse statt. In Kapitel 9 wird dann mit Hilfe des Levenberg-Marquardt Algorithmus und der in Kapitel 5 hergeleiteten Response-Funktionen ein Inversionsprogramm entwickelt. Weiterhin findet eine Kopplung des Inversionsprogramm mit den trainierten neuronalen Netzen statt und eine Auswertung der Ergebnisse. Kapitel 10 gibt eine Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse sowie einen Ausblick über einen weiteren Einsatz von künstlichen neuronalen Netzen und Response-Funktionen für die Analyse von Spektrallinien und deren Profilen.

## 1.1 Motivation

Künstliche neuronale Netze als neuartiges Berechnungsmodell haben seit Mitte der achtziger Jahre große Aufmerksamkeit auf sich gelenkt. Längst sind diese nicht mehr nur Gegenstand der Forschung in der künstlichen Intelligenz und der Mathematik, sondern haben beachtliche Erfolge in der Anwendung auf verschiedensten Gebieten der Wissenschaft erzielt (Grossberg 1988).

Künstliche neuronale Netze orientieren sich in ihrem Aufbau und ihrer Konzeption an der Funktionsweise des Gehirns. Sie können dazu genutzt werden, wichtige geistige Fähigkeiten, wie das Lernen aus Beispielen, das Abstrahieren, das schnelle Erkennen und Vervollständigen komplizierter Muster, das assoziative Speichern und Abrufen von Informationen, nachzubilden und zu simulieren.

In Gebieten, in denen ein mathematisches Modell zur Beschreibung des Verhaltens eines Systems unbekannt oder unvollständig ist, können neuronale Netze durch Gegenüberstellung von Eingangs- und Zieldaten die funktionellen Abhängigkeiten zwischen den Daten erkennen und den zugrundeliegenden Sachverhalt approximierend darstellen (Hecht-Nielsen 1990).

Ein weiterer Aspekt, der die Anwendung von künstlichen neuronalen Netzen attraktiv erscheinen lässt, ist die Geschwindigkeit. Künstliche neuronale Netze stellen ein Netzwerk von elementaren Berechnungseinheiten dar, die eine massive parallele Verarbeitung erlauben. Zwar ist der Erstellungsprozess von künstlichen neuronalen Netzen mitunter sehr zeitaufwendig, doch ein einmal adaptiertes Netz ist in der Lage, Daten äußerst schnell zu verarbeiten.

Die Linienprofile der Stokes-Parameter für photosphärische Absorptionslinien, die unter den Voraussetzungen des lokalen thermischen Gleichgewichts (local thermal equilibrium, LTE) entstehen, können mit guter Genauigkeit durch Syntheseprogramme reproduziert werden. So kann der Einfluss verschiedener physikalischer Parameter auf die Linienprofile simuliert werden. Doch die Rückrechnung aus den Linienprofilen auf die physikalischen Einflussparameter, also das inverse Problem lässt sich oftmals nicht direkt angehen. Durch die Nicht-Eindeutigkeit und die Nicht-Linearität des inversen Problems, wird dieses in ein nichtlineares Optimierungsproblem überführt, und das theoretische Modell wird iterativ an die gemessenen Profile angepasst. Diese Prozeduren sind zum einen sehr empfindlich bezüglich der Startwerte und zum anderen für die Bearbeitung von vielen Beobachtungsdaten sehr zeitaufwendig. Aufbauend auf den Fähigkeiten der künstlichen neuronalen Netzen besteht nun die Möglichkeit, durch Syntheseprogramme ausreichend Linienprofile zu erzeugen und einem neuronalen Netz so den Einfluss der verschiedenen physikalischer Parameter, insbesondere des Magnetfeldvektors, auf die Linienprofile aufzuzeigen. Das neuronale Netz soll die funktionalen Zusammenhänge erkennen und anschließend, im Sinne einer Inversionsrechnung, unbekannte Profile den physikalischen Parametern zuordnen.

Diese schnelle Annäherung an die physikalischen Parameter durch die neuronale Netze, dienen dann als Ausgangspunkt für die folgenden nichtlineare Optimierung durch den Levenberg-Marquardt-Algorithmus. Bei dem das theoretische Modell des Strahlungstransports iterativ an die gemessenen Linienprofile angepasst werden. Dabei stellen die Response-Funktionen für die Stokes-Parameter ein entscheidendes Werkzeug dar. Response-Funktionen werden durch eine Entwicklung der Strahlungstransportgleichung in erster Ordnung, nach einem für die Untersuchung relevanten physikalischen Parameter, gewonnen. Es wurde von Ruiz Cobo und del Toro Iniesta (1994) gezeigt, dass Response-Funktionen den partiellen Ableitungen der Stokes-Parameter nach den gesuchten physikalischen Parametern entsprechen. Mit diesen Werten für die partiellen Ableitungen der Stokes-Parameter nach den höhenabhängigen physikalischen Parametern werden dann die Gradienten und die Hesse-Matrix berechnet, welche den Kern des Levenberg-Marquardt Algorithmus bilden. Damit wird es möglich, ohne die von der zu stark vereinfachenden Annahmen ausgehenden analytischen Lösung (Milne-Eddington Atmosphäre) auszukommen, bei der z.B. die Absorptionsmatrix als unabhängig von der optischen Tiefe angenommen wird und somit keine Möglichkeit für die Berechnung von Gradienten besteht. Durch die Verwendung von Response-Funktionen kann die genauere numerische Lösung benutzt werden, um Gradienten verschiedener Parameter der Atmosphäre zu bestimmen.

In der folgenden Arbeit soll somit untersucht werden ob die in den Stokes-Profilen enthaltenen Information über die atmosphärischen Parameter durch ein künstliches neuronale Netz zu bestimmen sind, bzw. ob das inverse Problem durch ein künstliches

---

neuronalen Netz zu lösen ist. Weiterhin soll durch die Kombination von künstlichen neuronalen Netzen und der Inversion basierend auf den Response-Funktionen eine erhebliche Beschleunigung des Inversionsverfahrens erzielt werden.

## 1.2 Eingrenzung der Arbeit

Um eine sinnvolle Anwendung und Beurteilung der vorgestellten Methoden im Rahmen der Diplomarbeit zu gewährleisten, müssen entsprechende Grenzen in Bezug auf Umfang und Anwendungsbereich gezogen werden.

Sonnenflecken stellen einen bevorzugten Ort für die Untersuchung und Inversion von Stokes-Linienprofilen dar. Dort, wo Magnetfelder durch die Sonnenoberfläche stoßen und sich unter anderem in der Bildung von Sonnenflecken manifestieren, ist die Untersuchung der polarisierten Strahlung die aussagekräftigste Methode um Magnetfeldstrukturen zu bestimmen. Stokes-Linienprofile von voll entwickelten Sonnenflecken sollen auch in dieser Arbeit untersucht werden. Dabei werden ausschließlich Linienprofile der Umbra betrachtet. Die Umbra stellt sich weitaus homogener und ruhiger dar als die umgebende Penumbra, in der hohe auf- und absteigende Plasmaströme (Evershed-Effekt) auftreten. Weiterhin treten dort hohe Geschwindigkeitsgradienten dieser Plasmaströme, sowohl in horizontaler als auch vertikaler Richtung auf. Dies führt zu stark asymmetrischen Stokes-V-Profilen, die durch Magnetfeldgradienten verstärkt werden und eine Analyse erschweren.

Desweiteren konzentriert sich diese Arbeit auf photosphärische Absorptionslinien, denn hier gilt in guter Näherung lokales thermisches Gleichgewicht (LTE), welches eine numerische Berechnung des Strahlungstransportes und damit auch die Erstellung von synthetischen Linienprofilen wesentlich vereinfacht. Die Tests und Beurteilungen der erzielten Ergebnisse werden mit synthetisch erzeugten Profilen durchgeführt. Dies stellt aufgrund der guten Qualität der unter LTE-Bedingungen erzeugten synthetischen Profile keine wesentliche Einschränkung dar.

Bedingt durch den zeitaufwendigen experimentellen Erstellungsprozess von künstlichen neuronalen Netzen wird nicht darauf abgezielt eine optimale Netzstruktur zu erstellen, vielmehr soll die prinzipielle Anwendbarkeit im Vordergrund stehen, also die Adaptionfähigkeit an das Inversionsproblem. Auch bei der Implementation des Levenberg-Marquardt Algorithmus mit Hilfe der Response-Funktionen wird der Schwerpunkt nicht auf Zeit und Leistungsoptimierung gesetzt. Auch können die Tests der beiden Verfahren aufgrund der Vielzahl von atmosphärischen Einflussgrößen sicher nicht erschöpfend durchgeführt werden. Dennoch wird gerade bei der Bewertung von künstlichen neuronalen Netzen eine große Zahl an Linienprofilen getestet und ausgewertet, um so die Leistungsfähigkeit und Aussagekraft der durch die künstlichen neuronalen Netze erzielten Ergebnisse aufzuzeigen.

## 2 Grundlagen zur Sonne

In diesem Kapitel sollen ein kurzer Überblick über den Aufbau und die Struktur der Sonnenatmosphäre und der von Sonnenflecken gegeben werden sowie einige Ihrer wesentlichen Eigenschaften dargestellt werden. Dies soll nur soweit geschehen, wie es für ein weiteres Verständnis der Arbeit sinnvoll ist.

### 2.1 Aufbau und Struktur der Sonne

Gemessen an der Vielzahl der Sterne in unserer Galaxis ist unsere Sonne ein ziemlich gewöhnlicher Stern vom Spektraltyp G2. Aber die Nähe zur Erde macht sie, zu einem einzigartigen Laboratorium für die Untersuchung der grundlegenden Eigenschaften der Sternphysik.

#### 2.1.1 Der innere Aufbau der Sonne

Die Sonne ist, wie alle anderen Sterne auch, ein massives kugelförmiges Gebilde aus Plasma, das durch seine Eigengravitation zusammen gehalten wird. Ungefähr zu 90% bestehend aus Wasserstoff und zirka zu weiteren 10% aus Helium, ein Rest von ca. 0,1% verteilt sich auf andere Elemente wie z.B. C, N und O.

Das innere der Sonne ist grob in drei Bereiche eingeteilt, dazu gehören der zentrale innere Bereich (der Kern) der ca. 0,25 Sonnenradien umfasst und in dem ca. 99% der Energie erzeugt werden. Im Kern der Sonne herrscht eine Temperatur von ca.  $15 \cdot 10^6$  Kelvin und eine Dichte von  $1,6 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-3}$ . Diese Verhältnisse reichen aus, um die Kernfusion von Wasserstoff zu Helium zu ermöglichen.

Der nächste Bereich um den Kern ist die Strahlungszone, benannt nach dem hauptsächlichen Mechanismus des Energietransports, die sich bis ca. 0.7 Sonnenradien erstreckt. In ihr fällt die Temperatur von ungefähr  $8 \cdot 10^6$  Kelvin auf  $5 \cdot 10^5$  Kelvin ab. Die im Kern produzierte Strahlung diffundiert, durch permanentes Absorbieren und Emittieren, langsam durch die Strahlungszone hindurch. Die ursprünglichen hoch energetischen Gammaphotonen aus dem Kern verlieren so auf dem weg zur Oberfläche soviel Energie, das der Hauptbeitrag der Strahlung an der Oberfläche im sichtbaren Bereich liegt.

In der sich anschließenden Konvektionszone, die sich bis zur sichtbaren Oberfläche erstreckt, ist die Temperatur niedrig genug, das schwerere Ionen einige ihrer Elektronen halten können. In groben Zügen führt das durch die vermehrt auftretende Absorption zu einem schnellen Ansteigen der optischen Dichte und so zu einem Energiestau bzw. einem großen Temperaturgradienten. Als Folge dessen wird diese Schicht instabil und es tritt Konvektion auf, welche den Hauptteil des Energieflusses in diesem Gebiet ausmacht. Diese Konvektion ist auf der Sonnenoberfläche als Granulation beobachtbar.

## 2.1.2 Die Photosphäre

Oberhalb der Konvektionszone vollzieht sich innerhalb eines relativ kleinen Bereiches der Übergang von nahezu vollständiger optischer Undurchlässigkeit zu vollständiger Durchlässigkeit. Diese ca. 500 km dicke Schicht emittiert praktisch die gesamte Strahlung der Sonne in den Raum und heißt Photosphäre. Der Nullpunkt der geometrischen Höhe - also die Oberfläche - ist festgesetzt durch den Wert Eins der optischen Tiefe bei einer Wellenlänge von 500 nm. In einem Bereich von ca. 500 km nimmt der Wert der optischen Tiefe von 1 auf  $10^{-4}$  ab. Die Photosphäre stellt somit praktisch eine leuchtende Oberfläche der Sonne dar. Pro Sekunde strahlt die Sonne etwa  $4 \cdot 10^{26}$  Joule Energie in den Raum ab, wobei das Maximum der Energieabstrahlung bei einer Wellenlänge von 500 nm liegt. Das von der Photosphäre ausgehende kontinuierliche Spektrum entspricht in großen Bereichen etwa dem eines schwarzen Körpers<sup>1</sup>, was, im Sinne des Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetzes, einer effektiven Temperatur von 5780 K entspricht. Dem kontinuierlichen Spektrum der Sonne sind eine große Anzahl von Absorptionslinien aufgeprägt. Diese haben ihren Ursprung in dem raschen Ansteigen der optischen Dichte für einige Wellenlängen in den Schichten der Photosphäre und der sich anschließenden unteren Chromosphäre. Der weitaus größte Teil der Strahlung der Sonne wird im sichtbaren Bereich abgestrahlt; davon werden ungefähr 90% von der Photosphäre abgestrahlt. Die physikalischen Eigenschaften dieser Schicht, wie chemische Zusammensetzung, Druckverhältnisse und Temperaturverlauf, bestimmen so maßgeblich das gemessene Sonnenspektrum. Die Dichte der Materie nimmt in der Photosphäre von innen nach außen ab, von etwa  $10^{-7}$  g cm<sup>-3</sup> bis  $10^{-8}$  g cm<sup>-3</sup>, und die Temperatur fällt von ungefähr 6000 K auf 4000 K.

Eine sichtbare Eigenschaft der Sonnenoberfläche ist, dass der mittleren Helligkeitsverteilung eine kleinräumige, schnell variierende Hell-Dunkel-Struktur überlagert ist, die Granulation. Die einzelnen hellen Elemente, die sogenannten Granulen, haben einen mittleren Durchmesser von 1400 km und eine mittlere Lebensdauer von einigen Minuten. Dabei handelt es sich um Auslauferscheinungen der unter der Photosphäre liegenden Konvektionszone. Hier steigen statistisch wechselnd heißere Turbulenzelemente auf, während kühlere Materie in den Randgebieten der Granulen absinkt. Der Temperaturüberschuß von 200 bis 300 Kelvin in den Zentren der Granulen sorgt für die Hell-Dunkel-Struktur.

Eine weitere beobachtbare Eigenschaft der Sonnenoberfläche ist das schwingende Verhalten der Oberfläche. Bei genaueren Registrierungen der Dopplereffekte an vielen benachbarten Stellen der Sonnenoberfläche zeigt sich, dass jeweils Bereiche von ca.  $10^4$  km mit Perioden um 5 Minuten auf- und abschwngen. In einem bestimmten Bereich bauen sich die Schwingungen in etwa einer halben Stunde zu maximalen Amplituden (einige  $100$  m s<sup>-1</sup>) auf

---

<sup>1</sup> Es besteht kein wirkliches thermisches Gleichgewicht in der Sonnenatmosphäre, wie es als Voraussetzung für die Anwendung des Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetzes notwendig wäre. Trotzdem können die Verhältnisse in der Photosphäre mit guter Genauigkeit durch die Annahme des lokalen thermischen Gleichgewichts dargestellt werden. In Kapitel 3 wird näher darauf eingegangen, dass das lokale thermische Gleichgewicht als sinnvolle Näherung in der Photosphäre benutzt werden kann.

und vergehen wieder. Eine detaillierte Analyse des räumlichen und zeitlichen Schwingungsverhaltens zeigt, dass es sich um eine Überlagerung einer sehr großen Zahl von Resonanzschwingungen des Sonnenkörpers handelt. Diese stehenden Druckwellen werden immer wieder durch turbulente Materiebewegungen im Inneren der Sonne angeregt. Die resultierenden Schwingungen hängen von den physikalischen Eigenschaften im Sonneninneren ab, und so können Messungen dieser Schwingungen Aufschluss über den inneren Aufbau der Sonne geben.

### 2.1.3 Die Chromosphäre

Nach außen hin schließt sich an die Photosphäre die Chromosphäre an. Während die Dichte nach außen zu sehr rasch klein wird, bis herunter zu  $10^{-11} \text{ g cm}^{-3}$ , steigt die Temperatur nach Erreichen eines Minimums innerhalb der Chromosphäre wieder an, und zwar auf zirka  $10^5 \text{ K}$ . Da aber die Dichte so gering ist, beträgt die Abstrahlung der Chromosphäre trotz ihrer hohen Temperaturen nur geringe Bruchteile der Photosphärenstrahlung. Entsprechend sinkt die Intensität der Abstrahlung jenseits der Photosphäre auf  $10^{-3}$  und weniger des Wertes der Scheibenmitte. So geringe Strahlung wird jedoch leicht von dem in der Erdatmosphäre gestreuten Photosphärenlicht überdeckt, sodass die Chromosphäre vom Erdboden aus unter normalen Bedingungen nicht sichtbar ist. Bei Sonnenfinsternissen oder mit speziellem Gerät wird die Chromosphäre sichtbar. Dabei zeigt sich, dass das Spektrum der Chromosphärenstrahlung aufgrund der ansteigenden Temperaturen aus Emissionslinien hochangeregter und ionisierte Atome besteht. Nach oben hin ist die Chromosphäre, bei zirka  $10^4 \text{ km}$  über der Photosphäre, durch den sehr steilen Anstieg der Temperatur - der sogenannten Übergangsschicht - zur Korona hin begrenzt.

Mit monochromatischen Aufnahmen in den Zentren starker Absorptionslinien, also durch die Aufnahme von Strahlung, die weit oberhalb der Photosphäre entsteht, zeigt sich eine netzartige Struktur der Chromosphäre. Diese stellt eine Abbildung großräumiger Bewegungen in der Photosphäre dar und wird Supergranulation genannt. Auch hier steigt wie bei den Granulationszellen der Photosphäre, Materie im Zentrum auf und an den Ränder wieder ab. Diese sich langsam bewegenden Zellen haben eine Lebensdauer von ca. 24 Stunden und sind etwa 30000 km im Durchmesser.

### 2.1.4 Die Korona

Nach außen hin geht die Chromosphäre schließlich in die bis zu mehrere Sonnenradien ausgedehnte Korona über, die mit ca.  $10^{-18} \text{ g cm}^{-3}$  bereits extrem verdünnt ist. Ihre Strahlungsintensität ist nur ca.  $10^{-6}$  der Intensität der Photosphäre, so dass sie ebenfalls nur bei Sonnenfinsternissen sichtbar wird. Der Hauptteil der Strahlung hat ein kontinuierliches Spektrum mit einer spektralen Intensitätsverteilung, etwa wie im Kontinuum der Photosphärenstrahlung. Deren Absorptionslinien sind aber in der Koronastrahlung nicht vorhanden. Bei der Koronastrahlung handelt es sich tatsächlich um Photosphärenlicht, das in der Korona an freien Elektronen gestreut wird. Durch die hohen Temperaturen in der



Korona werden die vorhandenen Absorptionslinien durch den Dopplereffekt völlig verschmiert. Dem Kontinuum der Streustrahlung überlagert sind Emissionslinien, in denen aber nur etwa 1% der gesamten Koronastrahlung liegt. Die Emissionslinien entstehen durch hoch ionisierte Atome in der Korona. Derartige hohe Ionisationen und die großen thermischen Geschwindigkeiten der streuenden Elektronen werden durch die sehr hohen Temperaturen in der Korona erzeugt. Schon kurz nach dem Erreichen des Temperaturminimums in der unteren Chromosphäre steigt die Temperatur wieder monoton an. In der Übergangsschicht zwischen Chromosphäre und Korona steigt die Temperatur dann innerhalb weniger Kilometer dramatisch an, auf Temperaturen bis zu  $2 \cdot 10^6$  Kelvin. Die Mechanismen des Energietransportes durch die Chromosphäre und die Aufheizung der Korona sind immer noch nicht voll verstanden und Gegenstand der aktuellen Forschung.

## 2.2 Struktur und Eigenschaften von Sonnenflecken

Das am längsten bekannte veränderliche Phänomen der Sonnenoberfläche sind die Sonnenflecken. Ihr regelmäßiges Auftreten mit einer Periode von etwa 11 Jahren ist die auffälligste Erscheinung des solaren Aktivitätszyklus. Die neuere Forschung hat gezeigt, dass sich die Aktivität der Sonne neben den Flecken in vielen anderen verwickelten Phänomenen ihrer äußersten Schicht dokumentiert. Ihre gemeinsame Ursache ist die periodische Veränderung des solaren Magnetfeldes.

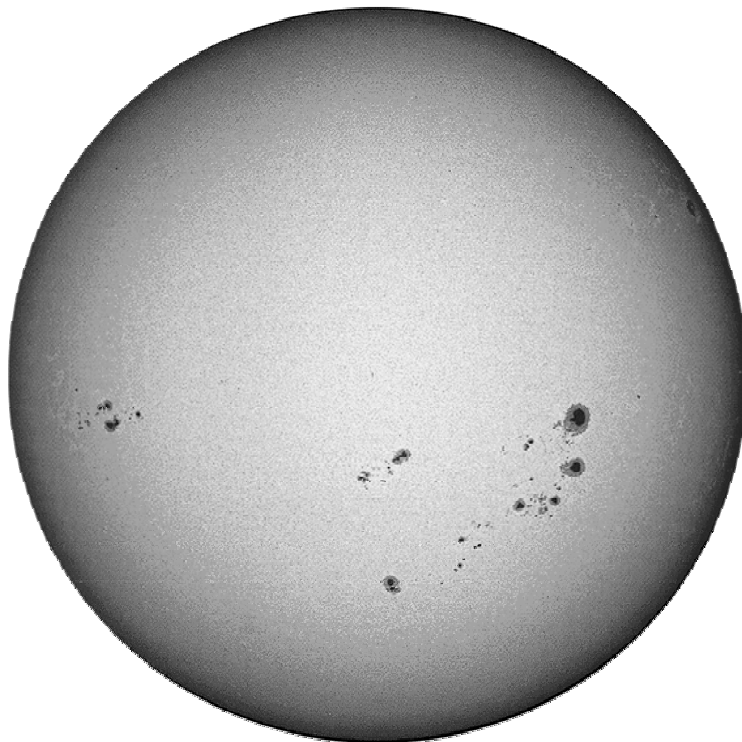


Abbildung 2.1 : Sonnenflecken auf der Sonnenoberfläche, Aufnahme im sichtbaren Licht.  
(Instituto de Astrofísica de Canarias, Tenerife Spain)

## 2.2.1 Aufbau von Sonnenflecken

Sonnenflecken wurden schon vor über 2000 Jahren von chinesischen Astronomen beobachtet und ab Anfang des siebzehnten Jahrhunderts unter anderem von Galilei mit den ersten Fernrohren beobachtet. Seitdem sind sie von vielen Astronomen untersucht worden. Erste Erklärungsversuche gingen von solaren Wirbelstürmen aus, die über die Sonnenoberfläche hinweg gingen. Der wirklichen Ursache kam man am Anfang dieses Jahrhunderts näher, als der amerikanische Astronom G.E. Hale Sonnenflecken als Orte von sehr stark lokalisierten Magnetfeldern identifizierte. Durch die Aufspaltung magnetisch sensitiver Absorptionslinien ergaben sich zentrale Magnetfeldstärken im Sonnenfleck von einigen tausend Gauß<sup>2</sup>. Sonnenflecken sind Magnetfeldstrukturen in der Form großer Flussröhren mit Durchmessern von bis zu 130000 km, die die sichtbare Oberfläche der Sonne durchstoßen. Diese Gebiete in der Photosphäre der Sonne besitzen eine niedrigere Temperatur als ihre Umgebung, weshalb sie dunkler erscheinen. Ihre effektive Temperatur liegt im Zentralbereich bei ca. 4000 K, im Unterschied zu der durchschnittlichen effektiven Temperatur von 5780 K in der Photosphäre. Ein Sonnenfleck besteht aus einem zentralen schwarzen Gebiet, der Umbra, und einem helleren äußeren Ring, der eine radiale fadenförmige Struktur aufweist und als Penumbra bezeichnet wird. Innerhalb dieser fadenförmigen Struktur treten große ein- und auswärtsgerichtete Plasmaströme auf. Dieses Phänomen wird nach seinem Entdecker auch Evershed-Effekt genannt. Abbildung 2.2 zeigt einen typischen Sonnenfleck.

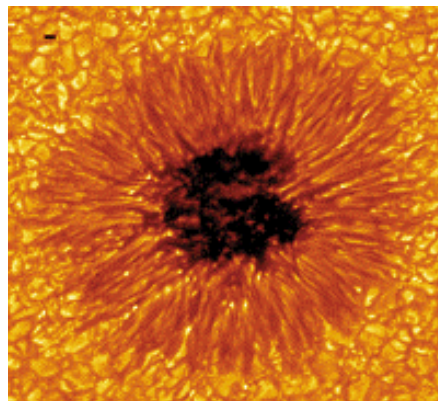


Abbildung 2.2 : Ausgebildeter Sonnenfleck mit Penumbra und Umbra  
(Instituto de Astrofísica de Canarias, Tenerife Spain)

Sonnenflecken rotieren mit der Oberfläche der Sonne. Ihre Intensität und Häufigkeit ändert sich zyklisch mit einer Periode von durchschnittlich ca. 11 Jahren. Mit dieser Periode verschiebt sich auch die durchschnittliche Breiten-Position der Fleckenherde auf der Sonne von etwa 35° am Anfang in Richtung auf den Äquator zum Maximum der Fleckenaktivität. Sonnenflecken treten häufig in bipolaren Gruppen auf, wobei zwei Flecken jeweils entgegengesetzte Polarität besitzen. Dies entspricht dem Austreten bzw. dem Wiedereintreten

---

<sup>2</sup> In der Sonnenphysik ist es aus historischen Gründen üblich, die Magnetfeldstärke in Gauß anzugeben, 1 Gauß = 10<sup>-4</sup> Tesla.

der Feldlinien einer magnetischen Flussröhre in die Sonnenoberfläche. Man unterteilt sie dann in einen vorausgehenden Fleck (preceding) und einen nachfolgenden (follower) Fleck. Alle 11 Jahre ändern die bipolaren Regionen ihre Orientierung, d.h. dass der in Rotationsrichtung führende Fleck die Polarität wechselt, so dass der magnetische Zyklus entgegen dem Aktivitätszyklus doppelt solange dauert, also 22 Jahre.

Der schottische Astronom A. Wilson beobachtete 1769, dass bei sonnenrandnahen Sonnenflecken die zentrumsseitige Penumbra des Sonnenfleckes kürzer als die randseitige Penumbra erscheint. Dieser sogenannte Wilson-Effekt, auch Wilson-Depression genannt, legt nahe, dass die Photosphäre in Sonnenflecken geometrische Einsenkungen aufweist. Dies entspricht der physikalischen Erwartung, dass durch die geringeren Temperaturen im Sonnenfleck sowohl die Druckskalenhöhe, als auch die optische Dichte erniedrigt sind und es somit möglich wird, tiefer in die Photosphäre hineinzuschauen.

## 2.2.2 Struktur des Magnetfeldes in Sonnenflecken

Mit Hilfe von Polarisationsmessungen in verschiedenen magnetisch sensitiven Absorptionslinien kann sehr gut die Magnetfeldausrichtung in Sonnenflecken experimentell bestimmt werden. Die durch den Zeeman-Effekt verschobenen Linienkomponenten sind rechts- bzw. linkszirkular polarisiert, wenn sich die Sichtlinie des Beobachters parallel zu den Magnetfeldlinien befindet (longitudinaler Zeeman-Effekt), und linear polarisiert, wenn die Sichtlinie senkrecht zum Magnetfeld steht (transversaler Zeeman-Effekt). Bei beliebigen Winkeln zur Sichtlinie ist das Licht elliptisch polarisiert. Hale fand schon zu Beginn dieses Jahrhunderts, dass das Magnetfeld im Mittelpunkt des Sonnenfleckes senkrecht zur Oberfläche steht und dass am äußeren Rand der Penumbra der Neigungswinkel zwischen Magnetfeldlinie und Sonnenoberfläche weniger als  $25^\circ$  beträgt. Die Abnahme des Betrages der Feldstärke kann angenähert dargestellt werden durch die Interpolationsformel

$$B(r) = \frac{B(0)}{1+r^2}, \quad (2.1)$$

wobei  $r$  den Abstand vom Fleckenzentrum in Einheiten des Penumbraradius angibt (Scheffler & Elsässer 1990).

Eine einfache Abschätzung für das Verhalten des Magnetfeldes mit der Höhe erhält man mit Hilfe des magnetohydrostatischen Gleichgewichts. In der inneren Umbra ist das Magnetfeld angenähert homogen und verläuft senkrecht zur Oberfläche. Dann muss senkrecht zu den Feldlinien, also horizontal, ein magnetischer Druck auftreten. Für einen stationären Fleck sollte daher in einer festen geometrischen Tiefe wenigstens näherungsweise gelten

$$P_g = P_g^* + \frac{B^2}{8\pi}, \quad (2.2)$$

wobei  $P_g^*$  und  $P_g$  die Gasdrücke im Fleck und in der benachbarten Photosphäre sind. Im magnetohydrostatischen Fall sollte also mit zunehmender Höhe durch den nachlassenden hydrostatischen Druck ein Auffächern der Magnetfeldlinien, und damit eine Abnahme der Magnetfeldstärke erfolgen. Abbildung 1.3 skizziert Richtungsverteilung des Magnetfeldes innerhalb eines Sonnenfleckes.

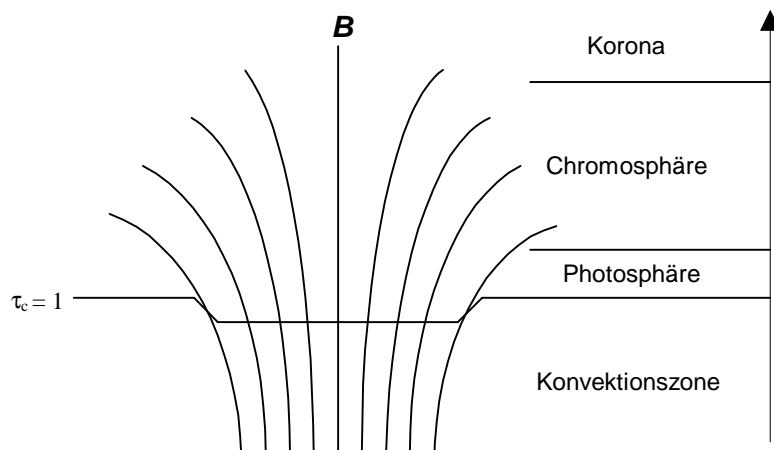


Abbildung 2.3 : Schematischer Verlauf der Magnetfeldlinien in einem Sonnenfleck. Die mit  $\tau_c=1$  gekennzeichnete horizontale Linie markiert den Verlauf der optischen Dichte mit dem Wert 1.

### 2.2.3 Entstehung von Sonnenflecken

Schon in den zwanziger Jahren hatte man angenommen, dass die Magnetfelder der Sonne durch einen elektromagnetischen Dynamo erzeugt werden, der durch Induktion die kinetische Rotationsenergie der Sonne in Magnetfelder umwandelt. Dieser kann aber nur durch die turbulente Konvektion im rotierenden Medium, also der Konvektionszone, wirksam werden. Man geht heute davon aus, dass die Magnetfelder der Sonne generierende Dynamo in den unteren Overshoot-Regionen – der Übergangsschicht zwischen der konvektiv stabilen Strahlungszone und der instabilen Konvektionszone – operiert. Grundlegend wichtig für die Erklärung der Aktivitätserscheinung ist die Einsicht, dass die starken Magnetfelder, wie sie in Sonnenflecken vorherrschen, nicht innerhalb von Tagen oder Wochen am Ort der aktiven Regionen entstehen und sich wieder auflösen können. In der gut leitenden Sonnenmaterie folgt für das mit dem Magnetfeld verknüpfte Stromsystem eine relativ lange Lebensdauer, bevor es durch Joulesche Wärmeverluste abgebaut werden kann und damit das Magnetfeld zum Verschwinden bringt. Abschätzungen für einen Fleckenradius von 10000 km liegen bei 1000 und mehr Jahren, d.h. für einen solchen Zeitraum wäre das Magnetfeld in der Materie „eingefroren“. Das Magnetfeld eines Sonnenfleckes muss demnach schon vor dem Erscheinen des Fleckes existieren und auch nach dessen Verschwinden noch vorhanden sein. Die Erklärung geht dahin, dass das Feld aus der Konvektionszone in Form von Magnetfeldschläuchen auftaucht. Nimmt man an, dass in den subphotosphärischen Schichten solche magnetischen Schläuche etwa parallel zu den Breitenkreisen liegen, so können diese durch magnetischen Auftrieb zur

---

Sonnenoberfläche aufsteigen. So ergibt sich auch eine relativ einfache Erklärung für das überwiegende Auftreten bipolarer Fleckengruppen.

Die Ausrichtung der Magnetfeldschläuche entlang der Breitenkreise kann folgendermaßen erklärt werden : Ein zu Beginn in den ersten  $10^5$  km unter der Photosphäre, also in der unteren Konvektionszone liegendes schwaches Magnetfeld, dessen Feldlinien sich von Polkappe zu Polkappe erstreckt, wird aufgrund der differentiellen Rotation der Sonne, wobei die Rotation zu den Polen hin abnehmend ist, nach und nach zum Äquator gezogen und so allmählich aufgewickelt. Das Magnetfeld wird durch die Umsetzung von Rotationsenergie in magnetische Energie verstärkt, wobei die Feldliniendichte zunimmt.

Für den Auflösungsprozess von Sonnenflecken sind wiederum die turbulenten Verhältnisse in der Konvektionszone als auch horizontale Bewegungen in den Supergranulationszellen verantwortlich.

Magnetische Flussröhren verlaufen relativ steil durch die Konvektionszone. Da die Konvektion orthogonal zum Magnetfeld unterbunden ist, weisen sie einen sehr steilen Temperaturgradienten gegenüber der Umgebung auf. Daher nimmt auch das dünne Plasma innerhalb der Flussröhren nicht die thermodynamischen Parameter der Umgebung an, und der Sonnenfleck ist kühler und erscheint dunkler.

## Teil II Theoretische Grundlagen

### 3 Der polarisierte Strahlungstransport

In diesem Kapitel werden die physikalischen Grundlagen der Arbeit dargestellt. Zuerst wird auf die Repräsentation von polarisiertem Licht eingegangen und die Aufspaltung von Absorptionslinien im Magnetfeld beschrieben. Anschließend wird der eigentliche Strahlungstransport in Anwesenheit eines Magnetfeldes behandelt sowie die formale Lösung beschrieben, welche die Grundlage für die numerische Berechnung des Strahlungstransports als auch der Response-Funktionen darstellen.

#### 3.1 Die Stokes-Parameter

Um vollständig oder auch nur partiell polarisierte Strahlung vollständig zu beschreiben, werden außer der monochromatischen Intensität  $I_v$  noch weitere Größen benötigt. Mit Hilfe der Wellenbeschreibung für die elektromagnetischen Strahlung, gelingt es mit drei zusätzlichen Parametern, die Orientierung und den Polarisationszustand des elektromagnetischen Feldes zu beschreiben. Diese insgesamt vier Parameter werden Stokes-Parameter genannt, deren erste Beschreibung auf G.G.Stokes aus dem Jahre 1852 zurückgeht. Sie haben den Vorteil, dass sie direkt messbar sind, alle die gleiche physikalische Dimension besitzen und es erlauben, den Strahlungstransport für polarisiertes Licht in einer kompakten Schreibweise zu formulieren.

Ein einzelner monochromatischer Wellenzug, der sich entlang der z-Achse bewegt und dessen elektrischer Feldvektor sich in der x-y-Ebene befindet, kann in seine zwei Komponenten entlang der x-Achse und der y-Achse zerlegt werden :

$$\begin{aligned} E_x &= A_x \cos(kz - \omega t - \varphi_x) \\ E_y &= A_y \cos(kz - \omega t - \varphi_y), \end{aligned} \quad (3.1)$$

wobei  $A_x$  und  $A_y$  die Amplituden sind,  $\varphi_x$  bzw.  $\varphi_y$  die Phasenverschiebungen,  $k = 2\pi c/v$  die Wellenzahl und  $\omega = 2\pi\nu$  die Frequenz ist. Für eine polarisierte Welle sind die Stokes-Parameter wie folgt definiert :

$$\begin{aligned} I_v &= A_x^2 + A_y^2 \\ Q_v &= A_x^2 - A_y^2 \\ U_v &= 2 A_x A_y \cos(\varphi_x - \varphi_y) \\ V_v &= 2 A_x A_y \sin(\varphi_x - \varphi_y). \end{aligned} \quad (3.2)$$

In dieser Form gehorcht (3.2) der Beziehung  $I_v = Q_v^2 + U_v^2 + V_v^2$ , welche für eine polarisierte Welle gültig wird. Dabei ist der Wellenzug linear, zirkular oder elliptisch polarisiert. Bei der Beobachtung von Licht besteht, selbst im monochromatischen Fall, das Licht nicht aus einem kohärenten Wellenzug, sondern aus einer Überlagerung von verschiedenen Wellenzügen mit eigenem Polarisationszuständen sowie Amplituden und Phasen. Die Gesamtpolarisation variiert daher mit der Zeit. Für die Beobachtung werden daher die Stokes-Parameter als zeitliches Mittel in folgender Weise interpretiert :

$$\begin{aligned}
 I_v &= \langle A_x^2 + A_y^2 \rangle \\
 Q_v &= \langle A_x^2 - A_y^2 \rangle \\
 U_v &= 2 \langle A_x A_y \cos(\varphi_x - \varphi_y) \rangle \\
 V_v &= 2 \langle A_x A_y \sin(\varphi_x - \varphi_y) \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Für den allgemeinen Fall der elliptischen Polarisation lässt sich mit der Einführung einer elliptischen PolarisationsEbene, wie in Abbildung 3.1 zu erkennen, ein Winkel  $\chi$  einführen der den Winkel der elliptischen a-Achse zur ursprünglichen x-Achse beschreibt. Das Verhältnis von großer zu kleine Achse, der durch die Amplituden aufgespannten elliptischen Ebene, ist dann durch  $\tan \beta = A_a/A_b$  gegeben.

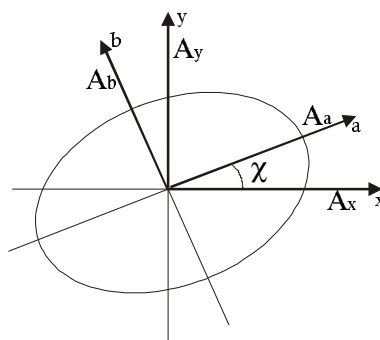


Abbildung 3.1 : Elliptische Ebene

Damit kann (3.2) umgeformt werden und in folgender Form geschrieben werden (Shurcliff 1962) :

$$\begin{aligned}
 I_v &= A_x^2 + A_y^2 \equiv A^2 \\
 Q_v &= A^2 \cos(2\beta) \cos(2\chi) \\
 U_v &= A^2 \cos(2\beta) \sin(2\chi) \\
 V_v &= A^2 \sin(2\beta).
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Mit diesen Relationen gewinnen die Stokes-Parameter eine recht anschaulich Erklärung :

$$\begin{aligned}
 I_v &= \text{Gesamtintensität} \\
 Q_v &= I_0^{\text{linear}} + I_{90}^{\text{linear}} \\
 U_v &= I_{+45}^{\text{linear}} + I_{-45}^{\text{linear}} \\
 V_v &= I_{\text{rechts}}^{\text{zirkular}} + I_{\text{links}}^{\text{zirkular}} .
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Der Stokes-I Parameter entspricht weiterhin der bekannten Strahlungsintensität, der Stokes-Q Parameter beschreibt dabei die Intensitätsdifferenz zwischen zwei Linearpolarisatoren in einem Winkel von 0 bzw 90 Grad. Stokes-U dagegen die Intensitätsdifferenz zweier Linearpolarisatoren mit einem Winkel von +45 Grad bzw. -45 Grad. Stokes-V gibt die Differenz zwischen rechts zirkular und links zirkular polarisierter Strahlung an. In dieser Form lassen sich die einzelnen Stokes-Parameter mit entsprechenden Polarisatoren leicht messen.

Der Gesamtzustand polarisierter Strahlung kann durch Zusammenfügen der Stokes-Parameter zum Stokes-Vektor :

$$\mathbf{I}_v^T = (I_v, Q_v, U_v, V_v) , \tag{3.6}$$

in kompakter Weise dargestellt werden, wobei  $\mathbf{I}^T$  den transponierten Vektor symbolisiert. Der Verlauf der einzelnen Stokes-Parameter über den Wellenlängenbereich bzw. Frequenzbereich wird als Stokes-Linienprofil bezeichnet.

## 3.2 Der Zeeman-Effekt

Der niederländische Physiker Pieter Zeeman fand im Jahre 1896, dass sich die Natrium D-Linie in der Anwesenheit eines Magnetfeldes verbreitert. In anschließenden Experimenten konnte er sogar eine vollständige Aufspaltung sowie eine Polarisation der aufgespaltenen Komponenten beobachten. Eine erste klassische Erklärung dieses Phänomens erfolgte schon kurz danach durch H.K. Lorentz. Die erste quantenmechanische Erklärung des Zeeman-Effekts wurde von Debye und Sommerfeld im Jahre 1916 geliefert und später von Bohr 1918 verbessert.

Der Hamilton-Operator eines Atoms in Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes ist in erster Ordnung gegeben durch :

$$H = H_0 + \frac{e}{2m_e} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \mathbf{B} , \tag{3.7}$$

wobei  $H_0$  der Hamilton-Operator ohne Magnetfeld ist,  $e$  die Elementarladung des Elektrons,  $m_e$  die Masse des Elektrons,  $\mathbf{L}$  ist der Gesamtdrehimpulsoperator wobei  $L^2$  die Eigenwerte  $\hbar^2$



$L(L+1)$  (mit  $L = 0, 1, 2, \dots$ ) besitzt,  $S$  ist der Gesamtspinoperator wobei  $S^2$  die Eigenwerte  $S(S+1) \hbar$  (mit  $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ ) besitzt und  $\mathbf{B}$  der Vektor des äußeren Magnetfeldes ist. Hierbei wird Russell-Saunders-Kopplung (L-S-Kopplung) vorausgesetzt so das der Gesamtdrehimpuls und der Gesamtspin zu  $\mathbf{J} = (\mathbf{L} + \mathbf{S})$  koppeln. Weiterhin gilt, dass das äußere Magnetfeld schwach im Vergleich zur Spin-Bahn-Wechselwirkung ist, wie es für die auftretenden Magnetfeldstärken in der Sonnenatmosphäre der Fall ist. Eine zeitunabhängige Störungstheorie erster Ordnung kann dann benutzt werden, um die Schrödinger-Gleichung zu lösen. Dabei ergibt sich, dass die  $(2J+1)$ -fache Entartung der Energiezustände aufgehoben wird. Die Energieniveaus sind gegeben durch den Term :

$$E_{J,M} = E_J + \mu_B g_J M_J B . \quad (3.8)$$

Hierbei ist  $E_J$  die Energie des atomaren Zustandes ohne Magnetfeld, also der Eigenwert von  $H_0$ ,  $\mu_B = eh/4\pi m_e$  ist das Bohrsche Magneton,  $g_J$  der Landé-Faktor und  $M_J$  die magnetische Quantenzahl, also der Eigenwert von  $J_z$ , der Komponente des Gesamtdrehimpulses  $J$  in Richtung des magnetischen Feldes  $B$ , wobei  $M_J$  die  $2(J+1)$  Werte im Bereich  $(-J, -J+1, \dots, J-1, J)$  annehmen kann. Bei L-S-Kopplung ergibt sich für den Landé-Faktor :

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} . \quad (3.9)$$

Der Zeeman-Effekt erhält historisch eine Unterteilung in den normalen und den anomalen Zeeman-Effekt. Dabei spalteten die Energieniveaus im Falle des normalen Zeeman-Effekts in drei Komponenten auf, wo hingegen beim anomalen Zeeman-Effekt eine Aufspaltung in mehr als drei Komponenten entsteht, welches im allgemeinen den Normalfall darstellt. Historisch gesehen wurde der normale Zeeman-Effekt zuerst beobachtet und fand in der klassischen Beschreibung durch H.K. Lorentz eine befriedigende Erklärung bis zur Beobachtung des sogenannten anomalen Zeeman-Effekts, der erst durch die oben skizzierte quantenmechanische Beschreibung vollständig beschrieben werden konnte und den normalen Zeeman-Effekt als Sonderfall mitbeinhaltet. Demnach entsteht der normale Zeeman-Effekt bei einem Übergang zwischen zwei atomaren Zuständen, wenn beide Zustände den gleichen Landé-Faktor (3.9) haben, wie z.B. beim Übergang zwischen zwei Singlettzuständen, oder beim Übergang zwischen einem  $J = 1$  und  $J = 0$  Zustand, wohingegen der anomale Zeeman-Effekt bei Übergängen entsteht, bei denen die beiden Niveaus unterschiedliche Landé-Faktoren haben. Für elektrische Dipolstrahlung sind die Übergänge aufgrund der Übergangswahrscheinlichkeiten (Auswahlregeln) in folgender Weise eingeschränkt :

$$\begin{aligned} \Delta L &= 0, \pm 1, \\ \Delta J &= 0, \pm 1, \text{ wobei } J = 0 \rightarrow J = 0 \text{ verboten ist.} \\ \Delta M &= 0, \pm 1, \\ \Delta S &= 0 . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für einen beliebigen Übergang wird die mit der Auswahlregel  $\Delta M = 0$  erhaltene Emissions- bzw. Absorptionslinie als  $\pi$ -Komponente bezeichnet. Bei  $\Delta M = \pm 1$  werden diese als  $\sigma^+$ -Komponenten bzw. als  $\sigma^-$ -Komponenten bezeichnet, je nachdem, ob der Übergang  $\Delta M = +1$  oder  $\Delta M = -1$  entspricht. Die Verschiebungen der Linie in Absorption oder Emission lässt sich für einen Übergang von  $J = 1$  zu  $J = 2$  mit Gleichung (3.8) folgendermaßen ausdrücken :

$$\begin{aligned}
 h\nu &= (E_2 + \Delta E_2) - (E_1 + \Delta E_1) \\
 h\nu &= h\nu_0 + \frac{eh}{4\pi m_e} B (g_{J_2} M_{J_2} - g_{J_1} M_{J_1}).
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Dabei sind die  $\sigma^+$ -Komponenten rot verschoben und die  $\sigma^-$ -Komponenten blau verschoben zu den  $\pi$ -Komponenten bzw. der einen  $\pi$ -Komponenten beim normalen Zeeman-Effekt.

Der Polarisationszustand eines Photons ist direkt verbunden mit seinem Drehimpuls bzw. dem Spin, der bei einem atomaren Übergang erhalten bleiben muss. Daher hängt  $\Delta M$  für die magnetische Quantenzahl unmittelbar mit dem Polarisationszustand der Photonen zusammen. Weiterhin ist die zu beobachtende Polarisation abhängig von der Beobachtungsrichtung und der Magnetfeldausrichtung. Dabei werden zwei Grenzfälle unterschieden. Zum einen der longitudinale Zeeman-Effekt. Er entsteht, wenn die Magnetfeldrichtung und die Sichtlinie der Beobachtung einen Winkel von  $0^\circ$  bzw.  $180^\circ$  bilden. Dabei sind nur die beiden verschobenen  $\sigma$ -Komponenten sichtbar. Die  $\sigma^+$ -Komponenten ( $\Delta M = +1$ ) sind rechtszirkular polarisiert und die  $\sigma^-$ -Komponenten ( $\Delta M = -1$ ) linkszirkular polarisiert.

Der andere Grenzfall ist der transversale Zeeman-Effekt: Er entsteht, wenn Magnetfeldausrichtung und Beobachtungsrichtung einen Winkel von  $90^\circ$  haben. Dabei sind die  $\pi$ -Komponenten bzw. die einzelne  $\pi$ -Komponente (beim normalen Zeeman-Effekt) linear polarisiert und parallel zum Magnetfeld. Die  $\sigma$ -Komponenten sind ebenfalls sichtbar und aufgrund der Beobachtungsrichtung linear polarisiert. Sie haben aber eine Orientierung senkrecht zum Magnetfeld. Im allgemeinen Fall beliebiger Ausrichtung zwischen Beobachtung und Magnetfeld sind alle Komponenten sichtbar und die  $\sigma$ -Komponenten elliptisch polarisiert.

Dieser eben beschriebene Fall des Zeeman-Effekts und der Polarisationsrichtung der  $\pi$ - und  $\sigma$ -Komponenten gilt streng genommen nur für die Emission. Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Fall von Absorptionslinien wird der sogenannte inverse Zeeman-Effekt beobachtet. Hierbei kehren sich die Richtungen der Polarisation für den transversalen Fall um, d.h. die linear polarisierte  $\pi$ -Komponente ist senkrecht zum Magnetfeld und die  $\sigma$ -Komponenten sind parallel. Für den longitudinalen Fall sind die Polarisationsrichtungen der  $\sigma^+$ -Komponenten und  $\sigma^-$ -Komponenten vertauscht gegenüber dem oben beschriebenen Fall der Emission (Ye Shi-Hui 1994).

Aus dem oben Beschriebenen wird unmittelbar der Nutzen des Zeeman-Effekts bei der Untersuchung von magnetisch sensitiven Spektrallinien deutlich. Das Aufspalten als auch das

Polarisationsverhalten der Spektrallinien ist somit ein direktes Maß für die Stärke und Ausrichtung des vorherrschenden Magnetfeldes. Auf die Hindernisse, die ein einfaches Anwenden des Zeeman-Effekts erschweren, wird in Teil III der Arbeit eingegangen.

### 3.3 Lokales thermisches Gleichgewicht (LTE)

Eine der wesentlichen Voraussetzungen für die folgenden Vereinfachungen bei der Beschreibung der Spektren und des Strahlungstransports ist die des lokalen thermischen Gleichgewichts bzw. local thermodynamic equilibrium (LTE). Man spricht vom thermischen Gleichgewicht eines Gases, wenn der thermodynamische Zustand räumlich und zeitlich im gesamten Volumen durch einen Parameter, der Temperatur, gegeben ist. Jedes Volumenelement des Gases emittiert gerade soviel Strahlungsenergie, wie es absorbiert. Da in Sternatmosphären ein ständig nach außen gerichteter Netto-Strahlungsstrom existiert ist die Annahme des thermodynamischen Gleichgewichts zwar global für die ganze Sonnenatmosphäre nicht sinnvoll, jedoch ist sie häufig für kleine Volumenelemente innerhalb der Atmosphäre, dort wo die Dichte hoch genug ist und keine steilen Gradienten der Temperatur vorherrschen, eine brauchbare Näherung. Dieser Mechanismus gilt vor allem für die kontinuierliche Absorption, aber auch für manche Fraunhoferlinien. Die Reemission wird dann durch die Kirchhoff-Planck-Funktion beschrieben und findet so über einen weiten Frequenzbereich statt, wodurch Absorption und Emission weitgehend voneinander entkoppelt werden.

Eine Reihe von wesentlichen Vereinfachungen kann angewendet werden, wenn die Bedingungen des lokalen thermischen Gleichgewichts zutreffen. So kann z.B. die Reemission eines Volumenelements unter LTE-Bedingungen durch die Kirchhoff-Planck-Funktion dargestellt werden :

$$B_{\nu}(T) = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (3.12)$$

Weiterhin lässt sich die thermische Anregung mit Hilfe der Boltzmann-Statistik berechnen. Für die Besetzungszahlverhältnisse zwischen zwei Energieniveaus  $N_2$  und  $N_1$  gilt :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{\frac{-\Delta E_{21}}{kT}}, \quad (3.13)$$

dabei sind  $g_1$  und  $g_2$  die statistischen Gewichte des unteren bzw. des oberen Zustands und  $\Delta E_{21}$  ist die Energiedifferenz zwischen den beiden Energieniveaus.

Ebenso lässt sich die thermische Ionisation mit Hilfe der Saha-Gleichung berechnen.

Für den Ionisationsgrad, d.h. das Ionisationsverhältnis zwischen  $(r+1)$ -fach und  $r$ -fach ionisierten Atomen gilt :

$$\frac{n^{(r+1)}}{n^{(r)}} n_e = \frac{Q^{(r+1)}}{Q^{(r)}} \cdot 2 \cdot \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \cdot e^{-\frac{\Delta E_r}{kT}}, \quad (3.14)$$

hier sind  $Q^{(r+1)}$  bzw.  $Q^{(r)}$  die Zustandsummen der  $(r+1)$ - und  $r$ -fach ionisierten Atome und  $\Delta E_r$  die Ionisationsenergie des  $r$ -fach ionisierten Atoms.

Eine weitere wichtige Beziehung im lokalen thermischen Gleichgewicht ist durch die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung gegeben. Die Anzahl der Teilchen  $n \Phi(v)dv$  in einem Geschwindigkeitsintervall  $(v, v+\Delta v)$  ist durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion gegeben:

$$\Phi(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \cdot e^{-\left( \frac{v}{v_0} \right)^2} d\left( \frac{v}{v_0} \right), \quad (3.15)$$

wobei  $v_0$  durch :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (3.16)$$

gegeben ist und der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit bei der Temperatur  $T$  entspricht.

### 3.4 Linienprofile und Absorptionskoeffizienten

Eine grundlegende Größe des Strahlungstransportes ist die Intensität  $I$  eines Strahlungsfeldes. Im Photonenbild, bei dem der Photonenfluss der Beziehung  $I(v,n)/h\nu c$  gehorcht, kann die monochromatische Strahlungsintensität entlang des Weges  $z$  mit Hilfe der Elementarprozesse für die spontane und stimulierte Emission sowie der stimulierten Absorption zwischen zwei Niveaus, in folgender Form beschrieben werden (Mihalas 1978) :

$$\frac{4\pi}{h\nu} \frac{dI_\nu}{dz} = -(B_{12} N_1 \phi - B_{21} N_2 \psi) I_\nu + A_{21} N_2 \psi. \quad (3.17)$$

Dabei sind  $A_{21}$  und  $B_{21}$  die Einsteinkoeffizienten für die spontane bzw. stimulierte Emission und  $B_{12}$  der Koeffizient für die stimulierte Absorption.

Die Einsteinkoeffizienten gehorchen folgender Relation :

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \quad ; \quad \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{2hv^3}{c^2}, \quad (3.18)$$

wobei  $g_1$  und  $g_2$  die statistischen Gewichte des unteren bzw. oberen Niveaus sind.  $N_1$  und  $N_2$  in (3.17) sind die Besetzungszahlen für das untere bzw. des obere Niveau. Die Ausbreitung erfolgt dabei entlang der Richtung  $z$ . Die Emissions- bzw. die Absorptionsprofile sind durch  $\psi$  und  $\phi$  gegeben. Für den Fall des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (LTE) sind Absorption und anschließende Emission weitgehend voneinander entkoppelt und es gilt die Beziehung  $\psi(\nu) = \phi(\nu)$  gilt (Stenflo 1994).

Spontane Emission begrenzt die Lebensdauer des angeregten Zustandes, entsprechend der Unschärferelation bedeutet das eine Unschärfe des Energieniveaus. Daraus resultiert eine statistische Verbreiterung des Profils. Dieser Verbreiterungsmechanismus wird Strahlungsdämpfung genannt und die entstehende Verbreiterung als natürliche Linienbreite bezeichnet. Die Form der Verbreiterung ist durch die Lorentzprofilfunktion gegeben :

$$\psi(\nu - \nu_0) = \frac{\gamma^{rad} / 4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma^{rad} / 4\pi)^2} . \quad (3.19)$$

Die Dämpfungskonstante  $\gamma^{rad}$  hat dabei den Wert :

$$\gamma^{rad} = \frac{8\pi e^2}{3m_e c \lambda_0^2} , \quad (3.20)$$

sie lässt sich auch klassisch mit Hilfe des Oszillatormodells berechnen. Ein weiterer Verbreiterungsmechanismus ist die Stoß- oder Druckverbreiterung. Stoßverbreiterung resultiert aus der Kollision des strahlenden Atoms mit anderen Partikeln wie Elektronen, Ionen, Atomen oder Molekülen. Die dominierende Art der Stoßverbreiterung in der Photosphäre resultiert aus der Kollision des betrachteten Atoms mit hoch energetischen neutralen Wasserstoff-Atomen sowie mit freien Elektronen (Mihalas 1978). Hierbei wird die Anregungsenergie während der kurzen Wechselwirkung auf den Stoßpartner übertragen. Wie bei der Strahlungsdämpfung wird auch bei der Stoßdämpfung der Wellenzug des Atoms mit einem Dämpfungsterm im Zeitspektrum versehen, und zwar aufgrund der durch die Störung begrenzten Zeitdauer des Emissions- bzw. Absorptionsvorganges. Das hat wiederum ein Lorentzprofil, entsprechend dem in Gleichung (3.19), zur Folge. Daraus kann gemäß des Faltungssatzes die Fouriertransformierte berechnet werden, und der Dämpfungsterm lässt sich dann als Summe der beiden Anteile von Strahlungs- und Stoßdämpfung schreiben :

$$\gamma = \gamma^{rad} + \gamma^{col} . \quad (3.21)$$

so das aus Gleichung (3.19) :

$$\psi(v-v_0) = \frac{\gamma / 4\pi}{(v-v_0)^2 + (\gamma / 4\pi)^2}, \quad (3.22)$$

folgt. Zur Verbreiterung von Strahlungs- und Stoßdämpfung tritt noch die Verbreiterung durch den Dopplereffekt infolge der thermischen Geschwindigkeiten der absorbierenden und emittierenden Atome. Für  $v_0 \ll c$  gilt die Beziehung :

$$\frac{\Delta v_D}{v_0} = \frac{\Delta \lambda_D}{\lambda_0} = \frac{v_0}{c}, \quad (3.23)$$

für die Verschiebung der Frequenz bzw. der Wellenlänge in Einheiten der Dopplerbreite  $\Delta v_D$  bzw.  $\Delta \lambda_D$ , die wiederum durch die Geschwindigkeit  $v_0$  in Gleichung (3.16) gegeben ist;  $v_0$  bzw.  $\lambda_0$  bezeichnet dabei die Linienmitte. Zusammen mit der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung (3.15) folgt für die Profilkfunktion der Dopplerverschiebung der Ausdruck :

$$\varphi(\Delta v) = \frac{I}{\Delta v \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_D}\right)^2}. \quad (3.24)$$

Treten zusätzlich turbulente makroskopische Bewegungen auf, deren Ausdehnung so klein ist, dass ihre Richtung innerhalb eines bestimmten Weges mehrmals wechselt, (d.h. die mittlere freie Weglänge der Lichtquanten ist größer als der Durchmesser des Turbulenzelementes) dann kann die Verteilung der Turbulenzgeschwindigkeiten  $v_T$  näherungsweise ebenfalls durch eine Gaußverteilung dargestellt werden. Diese Art der Turbulenz wird Mikroturbulenz genannt. Für die beiden Gaußverteilungen der Dopplerverschiebung und Mikroturbulenz ergibt sich nach deren Faltung, dass sich die Dopplerbreite schreiben lässt als :

$$\Delta v_D = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_T^2}. \quad (3.25)$$

Um einen Ausdruck für die resultierende Profilkfunktion zu erhalten wird der Einfluss der Dopplerverschiebung  $\varphi(\Delta v)$  (3.24) auf das Absorptionsprofil  $\psi(v)$  (3.22) betrachtet. Diese entstehende Kontur  $\psi(v-\Delta v)$  tritt beim thermischen Dopplereffekt mit dem Gewicht  $\varphi(\Delta v)$  auf, so dass sich die kombinierte Linienprofilfunktion als Faltung ergibt :

$$\tilde{\psi}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v-\Delta v) \varphi(\Delta v) d(\Delta v). \quad (3.26)$$

So dass :

$$\tilde{\psi}(v) = \frac{I}{\Delta v_D \pi} \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\Delta v}{\Delta v_D}\right)^2}}{(v-v_0-\Delta v)^2 + (\gamma/4\pi)^2} d(\Delta v) = \frac{I}{\Delta v_D \pi} H(a, v), \quad (3.27)$$

wobei  $H(a, v)$  die sogenannte Voigt-Funktion bzw. die Voigt-Profilfunktion darstellt :

$$H(a, v) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v-y)^2 + a^2} dy. \quad (3.28)$$

Dabei ist :

$$y = \frac{v_0 - v}{c \Delta v_D} \quad ; \quad v = \frac{v - v_0}{\Delta v_D} \quad ; \quad a = \frac{\gamma}{4\pi \Delta v_D}. \quad (3.29)$$

Im folgenden soll die resultierende Profilfunktion wieder mit  $\psi(v)$  bezeichnet werden !

Um nun noch die Absorptionskoeffizienten zu bestimmen, wird die Gleichung (3.17) des Strahlungstransports in folgender Weise geschrieben :

$$\frac{dI_v}{dz} = -\kappa_l \psi I_v + j_v = \kappa_l \psi (I_v - S_l). \quad (3.30)$$

Dabei sind nun  $\kappa_l$  der Linienabsorptionskoeffizient,  $j_v$  der Emissionskoeffizient, und  $S_l$  die Ergiebigkeit bzw. die Linienquellfunktion. Entsprechend Gleichung (3.17) und den Einsteinrelationen (3.18) sind sie durch folgende Ausdrücke gegeben :

$$j_v = \frac{h\nu}{4\pi} A_{21} N_2 \psi, \quad (3.31)$$

$$S_l = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{I}{\frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} - 1}. \quad (3.32)$$

Der Linienabsorptionskoeffizient ist dann durch :

$$\kappa_l = \frac{h\nu}{4\pi} (B_{12} N_1 - B_{21} N_2) \quad \text{bzw.} \quad \kappa_l = \frac{h\nu}{4\pi} B_{12} N_1 \left( 1 - \frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} \right), \quad (3.33)$$

gegeben.

Der Einsteinkoeffizient  $B_{12}$  ist die Übergangswahrscheinlichkeit vom unteren zum oberen atomaren Zustand und entspricht somit dem atomaren Wirkungsquerschnitt der Absorption und hängt nur von den physikalischen Eigenschaften des oberen und unteren Zustandes ab. Es ist möglich  $B_{12}$ , direkt aus einer quantenmechanischen Rechnung zu ermitteln, doch ist es üblich und für den allgemeinen Fall genauer, den Wert für  $\kappa_l$  und damit  $B_{12}$  experimentell zu bestimmen. Damit wird jedem Übergang eine sogenannte Oszillatorstärke  $f_{12}$  zugeordnet, die ein Maß für die Stärke bzw. der Übergangswahrscheinlichkeit ist. Folgende Beziehung besteht dabei zwischen  $f_{12}$  und  $B_{12}$  :

$$\left( \frac{\pi e^2}{m_e c} \right) f_{12} = \left( \frac{h\nu}{4\pi} \right) B_{12}, \quad (3.34)$$

dabei ist  $e$  die Elementarladung und  $m_e$  die Masse des Elektrons. Wenn die Stoßrate der Partikel in der Atmosphäre groß genug ist und die Bedingungen des lokalen thermischen Gleichgewichts (LTE) angenommen werden können, lässt sich die Linienquellfunktion  $S_l$  (3.32) mit Hilfe der Boltzmann-Verteilung (3.13) schreiben als :

$$S_l = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (3.35)$$

was der Kirchhoff-Planck-Funktion (3.12) entspricht. Ebenfalls unter LTE-Bedingungen lässt sich dann der Linienabsorptionskoeffizient (3.33) mit Gleichung (3.12) in der Form :

$$\kappa_l = \frac{\pi e^2}{m_e c} N_l f_{12} \left[ 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right], \quad (3.36)$$

schreiben. Übergänge zwischen gebundenen Zuständen haben gemäß der Profilformen nur innerhalb eines kleinen Frequenzbereiches Einfluß auf das Strahlungsfeld. Von Bedeutung für die Strahlungsintensität sind neben den bereits diskutierten diskreten Übergängen auch kontinuierliche Absorptions- und Emissionsprozesse über einen weiten Frequenzbereich. Wesentlich sind hierfür die gebunden-frei Übergänge und die frei-frei Übergänge für die Absorption sowie deren inverse Prozesse für die Emission. Um diesen Prozessen Rechnung zu tragen, wird die Gleichung (3.16) des Strahlungstransports erweitert :

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -(\kappa_c + \kappa_l \psi) I_\nu + j_\nu \quad \text{mit} \quad (3.37)$$

$$j_\nu = \kappa_c S_c + \kappa_l \psi S_l, \quad (3.38)$$



wobei  $\kappa_c$  der kontinuierliche Absorptionskoeffizient ist und  $S_c$  die Kontinuumsquellfunktion bzw. Ergiebigkeit ist. Im allgemeinen gehorcht die kontinuierliche Hintergrundstrahlung den LTE-Bedingungen, da sie direkt aus den unteren Schichten der Photosphäre stammt. Somit ist die Quellfunktion des Kontinuums  $S_c$  ebenso wie  $S_l$  durch die Kirchhoff-Planck-Funktion  $B_\nu(T)$  (3.15), gegeben und die Strahlungstransportgleichung (3.37) kann für den Fall des lokalen thermischen Gleichgewichts geschrieben werden als :

$$\frac{dI_\nu}{dz} = (\kappa_c + \kappa_l \psi)(I_\nu - S_\nu) \text{ bzw.}$$

$$\frac{dI_\nu}{dz} = (\kappa_c + \kappa_l \psi)(I_\nu - B_\nu(T)). \quad (3.39)$$

### 3.5 Strahlungstransport im Magnetfeld

Im folgenden soll der Strahlungstransport in Anwesenheit eines Magnetfeldes beschrieben werden. Der Beschreibung soll der normale Zeeman-Effekt zugrundegelegt werden, also die Aufspaltung der Linie in drei Komponenten, so wie er auch bei den in Teil III dieser Arbeit benutzten FeI-Linien, vorkommt. Die unter (3.39) angegebene skalare Differentialgleichung wird nun für die durch den Zeeman-Effekt induzierte Polarisation, durch den Stokes-Vektor (3.6) beschrieben. Der Formulierung von Landi Degl'Innocenti (1976) folgend gilt dann :

$$\frac{d\mathbf{I}_\nu}{dz} = -\mathbf{K} (\mathbf{I}_\nu + \mathbf{S}_\nu), \quad (3.40)$$

dabei ist  $\mathbf{I}$  der Stokes-Vektor,  $z$  der Weg entlang der Ausbreitungsrichtung,  $\mathbf{K}$  die totale  $4 \times 4$  Absorptionsmatrix und  $\mathbf{S}$  der Quellvektor. Der Quellvektor  $\mathbf{S}$  ist entsprechend der Gleichung (3.39) für den Fall des lokalen thermischen Gleichgewichts definiert als :

$$\mathbf{S}_\nu = B_\nu(T) \mathbf{e}_0, \quad (3.41)$$

wobei  $\mathbf{e}_0$  der Vektor  $(1,0,0,0)^T$  ist. Für die totale Absorptionsmatrix gilt :

$$\mathbf{K} = \kappa_c \mathbf{I} + \kappa_l \psi, \quad (3.42)$$

dabei ist  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix und  $\psi$  die Absorptionsmatrix, die die einzelnen Stokes-Parameter miteinander koppelt und so Gleichung (3.40) zu einem gekoppelten System linearer Differentialgleichungen machen.

Die Absorptionsmatrix ist dabei auf folgende Weise definiert :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_I & \psi_Q & \psi_U & \psi_V \\ \psi_Q & \psi_I & \psi'_V & -\psi'_U \\ \psi_U & -\psi'_V & \psi_I & \psi'_Q \\ \psi_V & \psi'_U & -\psi'_Q & \psi_I \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Der Referenzrahmen zur Beschreibung, von Strahlungstransport und Magnetfeld wird in dem in Abbildung 3.2 dargestellten Koordinatensystem gegeben.

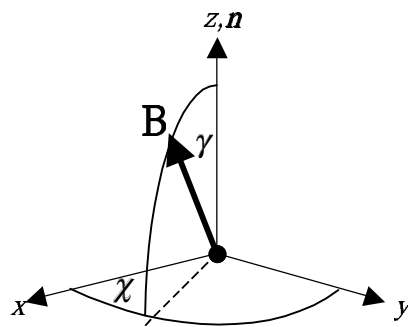


Abbildung 3.2 : Referenzrahmen zur Geometrie

Dabei ist  $\gamma$  die Inklination des Magnetfeldes bezüglich der Sichtlinie  $n$  und  $\chi$  der Azimut bezüglich einer beliebigen x-Achse. In dieser Anordnung lassen sich die Absorptionsprofile für die einzelnen Stokes-Komponenten in folgender Weise schreiben (Wittmann 1974) :

$$\begin{aligned} \psi_I &= \frac{1}{2} \psi_p \sin^2 \gamma + \frac{1}{4} (\psi_r + \psi_b) (1 + \cos^2 \gamma) \\ \psi_Q &= \frac{1}{2} \left[ \psi_p - \frac{1}{2} (\psi_r + \psi_b) \right] \sin^2 \gamma \cos 2\chi \\ \psi_U &= \frac{1}{2} \left[ \psi_p - \frac{1}{2} (\psi_r + \psi_b) \right] \sin^2 \gamma \sin 2\chi \\ \psi_V &= \frac{1}{2} (\psi_r - \psi_b) \cos \gamma \\ \psi'_Q &= \frac{1}{2} \left[ \psi'_p - \frac{1}{2} (\psi'_r + \psi'_b) \right] \sin^2 \gamma \cos 2\chi \\ \psi'_U &= \frac{1}{2} \left[ \psi'_p - \frac{1}{2} (\psi'_r + \psi'_b) \right] \sin^2 \gamma \sin 2\chi \\ \psi'_V &= \frac{1}{2} (\psi'_r - \psi'_b) \cos \gamma . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Diese Ausdrücke für die einzelnen Stokes-Komponenten sind gültig für elektrische Dipolübergänge. Diese geben den größten Beitrag zur Absorption und dominieren das Sonnenspektrum. Die Profile  $\psi_p, \psi_b$  und  $\psi_r$  entsprechen dabei der Voigt-Profilfunktion :

$$H(a, v - v_j) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v - v_j - y)^2 + a^2} dy. \quad (3.45)$$

Die Kennzeichnung der Profile mit den Indizes  $p, b$  oder  $r$  kennzeichnen die unverschobene  $\pi$ -Komponente sowie die blau- bzw. rotverschobene  $\sigma$ -Komponente des normalen Zeeman-Effekts. Von dem Parameter  $v$  (Gleichung 3.29) wird noch der Parameter  $v_j$  abgezogen, um der Aufspaltung durch den Zeeman-Effekt Rechnung zu tragen. Für den normalen Zeeman-Effekt, bei dem beide Landé-Faktoren gleich sind bzw. einer von beiden Null ist, lässt sich der Parameter  $v_j$  der Zeeman-Aufspaltung mit Hilfe von Gleichung (3.11) in Einheiten der Dopplerbite als :

$$v_j = \frac{B}{\Delta\lambda_D} \left( \frac{e\lambda_0^2}{4\pi m_e c^2} \right) g_J \Delta M_J \quad (3.46)$$

schreiben. Dabei ist  $g_J$  der gemeinsame Landé-Faktor und  $\Delta M_J$  die Differenz der magnetischen Quantenzahlen der beiden Energieniveaus.  $\Delta M_J$  ist gegeben durch :

$$\Delta M_J = M_{J_2} - M_{J_1} = \begin{cases} +1 \equiv b \\ 0 \equiv p \\ -1 \equiv r \end{cases}, \quad (3.47)$$

und charakterisiert so gemäß der Auswahlregeln den jeweiligen Übergang.

Durch das Magnetfeld und somit durch den Zeeman-Effekt wird nicht nur eine Änderung des Absorptionsprofils in Abhängigkeit von der Wellenlänge induziert, sondern dadurch auch ein von der Wellenlänge abhängige Änderung des Dispersionsverhalten und des Brechungsindex. Die Abhängigkeit von der Wellenlänge bedeutet bei vorhandener Zeeman-Aufspaltung gleichzeitig eine Abhängigkeit vom Polarisationszustand. Dadurch passieren Wellen mit unterschiedlichem Polarisationszustand das Medium mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeiten, es wird doppelbrechend. Der entstehende Effekt ist eine Transformation des Polarisationszustandes von einem in den anderen. Dieser als magnetooptischer Effekt bekannte Mechanismus wurde zuerst für den longitudinalen Fall, d.h. Magnetfeld- und Strahlungsrichtung sind parallel von M. Faraday 1855 (Faraday-Rotation) beobachtet und beschrieben. Um dem magnetooptischen Effekt Rechnung zu tragen, sind in der Absorptionsmatrix die mit  $\psi'_p, \psi'_b$  und  $\psi'_r$  dargestellten Faraday-Voigt-Profilfunktionen für die jeweiligen Zeeman-Komponenten enthalten. Die Anordnung

innerhalb der Absorptionsmatrix spiegelt die Umverteilung der Polarisationsarten wieder. Die Faraday-Voigt-Profilfunktion lautet wie folgt (Solanki 1987) :

$$F(a, v - v_j) = \psi' = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(v - v_j - y) e^{-y^2}}{(v - v_j - y)^2 + a^2} dy . \quad (3.48)$$

Dabei sind  $a$  und  $v$  wieder gemäß der Gleichungen (3.29) gegeben und  $v_j$  entsprechend Gleichung (3.46).

Weiterhin können großräumigen Strömungsgeschwindigkeiten des Plasmas am Ort der Linienentstehung zu einer Verschiebung des Linienprofils als ganzem führen (Dopplereffekt). Dieses zeigt sich deutlich über die Rot bzw. Blauverschiebung des Linienprofils. Für Geschwindigkeiten  $v_{plasma} \ll c$  gilt für den Dopplereffekt :

$$\frac{v_{plasma}}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{v_0} . \quad (3.49)$$

Um diesem Effekt Rechnung zu tragen, erhalten die Voigt- und Faraday-Voigt-Profilfunktion den Ausdruck für die Linienverschiebung :

$$v_{los} = \frac{\lambda_0 \mathbf{v}_{plasma} \cdot \mathbf{n}}{c \Delta\lambda_D} , \quad (3.50)$$

als zusätzliches Argument so das die Gleichungen für die Voigt- und Faraday-Voigt-Profilfunktion lauten :

$$H(a, v - v_j + v_{los}) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v - v_j + v_{los} - y)^2 + a^2} dy \quad \text{und} \quad (3.51)$$

$$F(a, v - v_j + v_{los}) = \psi' = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(v - v_j + v_{los} - y) e^{-y^2}}{(v - v_j + v_{los} - y)^2 + a^2} dy . \quad (3.52)$$

Zur Vereinfachung der Beschreibung bezeichnet die Koordinate  $r$  den Mittelpunktsabstand und ist senkrecht zur Oberfläche. Die Koordinate  $z$  ist weiterhin der Weg entlang der Beobachtungsrichtung und  $\theta$  der Winkel zwischen  $r$  und  $z$  mit  $\mu = \cos(\theta)$  gilt dann  $dr = \mu dz$ . Die optische Tiefe ist dann definiert als :

$$d\tau_c = -\kappa_c dr = -\kappa_c \mu dz , \quad (3.53)$$

wobei  $\kappa_c$  der kontinuierliche Absorptionskoeffizient ist.

Die Strahlungstransportgleichung für polarisierte Strahlung kann dann für eine planparallele Atmosphäre geschrieben werden als gekoppeltes lineares Differentialgleichungssystem :

$$\mu \frac{d\mathbf{I}_v}{d\tau_c} = -\mathbf{K} (\mathbf{I}_v + \mathbf{S}_v). \quad (3.54)$$

### 3.6 Formale Lösung des polarisierten Strahlungstransports

Im folgenden soll nun die formale Lösung des polarisierten Strahlungstransport der Gleichung (3.40) bzw. (3.54) in der Formulierung von Landi Degl'Innocenti (1987) vorgestellt werden. Diese Formulierung wird dann bei der Ableitung der Response-Funktionen nützlich sein, um diese in einer kompakten Weise darzustellen. Weiterhin wird der hier vorgestellte Evolutions-Operator für die Berechnung der Response-Funktionen von wesentlicher Bedeutung sein.

Ausgehend von der Gleichung (3.54) für den polarisierten Strahlungstransport :

$$\frac{d\mathbf{I}_v}{d\tau} = -\mathbf{K} (\mathbf{I}_v + \mathbf{S}_v), \quad (3.55)$$

wobei  $d\tau = \mu d\tau_c$  entspricht, lässt sich formal ein linearer Operator  $\mathbf{O}(\tau, \tau')$  einführen, der am Punkt  $\tau'$  auf den Stokes-Vektor wirkt und diesen in den Stokes-Vektor an der Stelle  $\tau$  überführt :

$$\mathbf{I}(\tau) = \mathbf{O}(\tau, \tau') \mathbf{I}(\tau'). \quad (3.56)$$

Dieser als Evolutions-Operator bezeichnete Operator  $\mathbf{O}(\tau, \tau')$  erfüllt dann die Beziehung :

$$\mathbf{O}(\tau, \tau) = \mathbf{I}, \quad (3.57)$$

wobei  $\mathbf{I}$  die  $4 \times 4$  Einheitsmatrix ist. Weiterhin erfüllt er die folgende Differentialgleichung :

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{O}(\tau, \tau') = \mathbf{K}(\tau) \mathbf{O}(\tau, \tau'). \quad (3.58)$$

So lässt sich zeigen, dass die formale Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems (3.55) mit Hilfe des Evolutions-Operators, in folgender Form geschrieben werden kann :

$$\mathbf{I}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_0} \mathbf{O}(\tau, \tau') \mathbf{K}(\tau') \mathbf{S}(\tau') d\tau' + \mathbf{O}(\tau, \tau_0) \mathbf{I}(\tau_0). \quad (3.59)$$

---

Für die Integration von  $\tau = 0$  bis  $\tau = \infty$  vereinfacht sich die Gleichung zu :

$$\mathbf{I}(0) = \int_0^{\infty} \mathbf{O}(0, \tau) \mathbf{K}(\tau) \mathbf{S}(\tau) d\tau . \quad (3.60)$$

Numerisch einfach berechenbar wird der Evolutions-Operator, wenn die totale Absorptionsmatrix  $\mathbf{K}$  im Intervall  $(\tau', \tau)$  als konstant vorausgesetzt wird. Dann lässt sich der Evolutions-Operator schreiben als :

$$\mathbf{O}(\tau, \tau') = e^{-(\tau - \tau') \mathbf{K}} . \quad (3.61)$$

Der Evolutions-Operator beschreibt demnach die Dämpfung des Stokes-Vektors, ohne den Emissionsanteil des Quellterm dabei zu berücksichtigen. Die Berechnung des Evolutions-Operators  $\mathbf{O}(0, \tau)$  sowie die gesamte Integration der Strahlungstransportgleichung (3.55) wird innerhalb des Strahlungstransportprogramms DIAMAG mit Hilfe der sogenannten DELO-Methode (Rees & Murphy 1989) durchgeführt (siehe Anhang).

## 4 Das inverse Problem

In diesem Kapitel soll kurz aufgezeigt werden, dass es sich bei der Bestimmung von physikalischen Parametern aus den Profildaten der Stokes-Parameter um ein inverses Problem handelt. Die damit zusammenhängenden Probleme werden kurz erläutert und eine Lösungsmethode auf der Basis einer nichtlinearen Optimierung wird vorgestellt.

### 4.1 Die Analyse von Stokes-Linienprofilen als inverses Problem

Bei der Aufgabenstellung des direkten Problems wird auf der Grundlage einer Theorie ein Modell gebildet und dieses durch festgelegte Parameter, die eventuellen Anfangs- oder Randbedingungen gehorchen, dazu benutzt, um dessen Entwicklung zu bestimmen, also in gewissem Sinne die Beobachtungen vorwegnehmen. In dieser Arbeit entspricht dem direkten Problem also der polarisierte Strahlungstransport. Bei der inversen Modellierung dagegen soll aus den in der Regel fehlerhaften Beobachtungsdaten die Modellkonfiguration, d.h. die Modellparameter und mitunter auch die Modellfunktion selbst, abgeleitet werden. Konkret wird also in dieser Arbeit aus den gemessenen Stokes-Linienprofilen auf die Modellparameter des polarisierten Strahlungstransports geschlossen. Zentrale Probleme sind dabei zum einen die Frage, ob die in den zur Verfügung stehenden Daten enthaltene Information genügt, um das Modell oder die Parameter des Modells eindeutig zu bestimmen und zum anderen, ob die Lösung stetig von den Daten abhängt. Im Sinne der Theorie der inversen Probleme ist also zu beurteilen ob es sich um ein sogenanntes „gut gestelltes Problem“ bzw. „schlecht gestelltes Problem“ (ill-posed Problem) handelt. Ein „gut gestelltes Problem“ wird durch folgende drei Bedingungen definiert (Louis 1989) :

- eine Lösung existiert
- die Lösung ist Eindeutig
- die Lösung hängt stetig von den Daten ab.

Die dritte Bedingung führt bei der numerischen Berechnung des linearisierten Systems auf die Kondition des Gleichungssystems.

Bei der Lösung kommt erschwerend hinzu, dass es sich beim polarisierten Strahlungstransport um ein nichtlineares Problem handelt und somit existiert auch für das inverse Problem keine allgemeine analytische Lösung. So ist bei der Vielzahl zu bestimmender Parameter davon auszugehen dass, dass Problem schlecht gestellt ist, was nicht zuletzt die numerischen Untersuchungen von Ruiz Cobo und del Toro Iniesta (1992) zeigen. Da aber das direkte Problem - der polarisierte LTE-Strahlungstransport - gut modellierbar ist, besteht der übliche Ansatz zur Lösung des inversen Problems in der Anpassung des

theoretischen Modells an die gemessenen diskreten Profildaten unter Einstellung der gesuchten Parameter. Dies geschieht mit Hilfe der Minimierung eines Zielfunktional, also der Überführung des inversen Problems in ein nichtlineares Optimierungsproblem. Dabei ist die Anzahl der Messdaten bedeutend größer als die Anzahl der zu bestimmenden Parameter, um dem kontinuierlichen Verlauf nahe zu kommen und den unvermeidbaren Beobachtungsfehlern Rechnung zu tragen. Das Zielfunktional, beim Vorliegen von  $n$  Messwerten  $y_i$  und der Bestimmung von  $a_1$  bis  $a_m$  freien Parametern, wird geschrieben als :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - F(x_i, a_1, \dots, a_m)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (4.1)$$

hierbei läuft der Index  $i$  über die Anzahl  $n$  der Messpunkte,  $F(x, \mathbf{a})$  ist das theoretische Modell und  $\sigma_i$  ist die Standardabweichung für jeden einzelnen Messpunkt. Die Minimierung dieses Zielfunktional entspricht genau der *maximum likelihood* Schätzung der Modellparameter, also der Schätzung der wahrscheinlichsten Parameter und der Annahme das eventuelle Messfehler Normalverteilung sind.

Ein Problem, das aus der Minimierung des Zielfunktional (4.1) bei schlecht gestellten Problemen resultieren kann ist, dass es sich bei Gleichung (4.1) um eine multimodale Funktion im  $m$ -dimensionalen Parameterraum handelt, so das sich mehrere lokale Extremwerte auf der Hyperfläche ausbilden können. Wie die meisten nichtlinearen Optimierungsverfahren ist auch das im folgenden vorgestellte Levenberg-Marquardt-Verfahren ein iteratives lokales Optimierungsverfahren, und das Auffinden einer Lösung, einer multimodalen Funktion, hängt somit entscheidend von den Anfangsbedingungen ab, d.h. vom Startpunkt im Parameterraum. Geeignetes a priori Wissen ist daher mit entscheidend für das Auffinden des optimalen Minimums. Bei der Regularisierung des Problems und der Annäherung an das Optimum werden die in Kapitel 6 vorgestellten künstlichen neuronalen Netze entscheidenden Anteil haben.

## 4.2 Der Levenberg-Marquardt-Algorithmus

Der von Levenberg vorgeschlagene und von Marquardt (1963) ausgearbeitete Levenberg-Marquardt-Algorithmus ist ein nichtlineares Optimierungsverfahren vom Gauß-Newton-Typ. Demnach wird iterativ, von einem Startwert beginnend, im  $m$ -dimensionalen Parameterraum das lokale Minimum aufgesucht. Die nichtlineare Modellfunktion ist gegeben durch :

$$F_i = F(x_i, \mathbf{a}), \quad (4.2)$$

wobei  $\mathbf{a}$  den  $m$ -dimensionale Parametervektor darstellt und  $x_i$  eine vom Messpunkt unabhängige Variable ist. Ausgehend von der Idee des iterativen Fortschreitens in Richtung Minimum wird die Funktion (4.2) linearisiert, also in erster Ordnung entwickelt



$$F(x_i, \mathbf{a}_0 + \Delta \mathbf{a}) = F(x_i, \mathbf{a}_0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F(x_i, \mathbf{a}_0)}{\partial a_k} \Delta a_k. \quad (4.3)$$

Die Minimierungsbedingung für die Zielfunktion (4.1) lautet

$$\nabla \chi^2 = 0. \quad (4.4)$$

Mit dem Einsetzen der Entwicklung (4.3) in die Zielfunktion (4.1) und dem anschließenden Einsetzen in (4.4) folgt, geschrieben als Matrixgleichung

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{a}, \quad (4.5)$$

dabei ist der Vektor  $\mathbf{b}$  durch

$$\mathbf{b}_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - F(x_i, \mathbf{a}_0)) \frac{\partial F(x_i, \mathbf{a}_0)}{\partial a_k} \quad (4.6)$$

gegeben. Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist dann

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial F(x_i, \mathbf{a}_0)}{\partial a_j} \frac{\partial F(x_i, \mathbf{a}_0)}{\partial a_k}. \quad (4.7)$$

Ausgehend vom letzten angenäherten Punkt  $\mathbf{a}_0$  wird dann iterativ durch den Korrekturterm

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (4.8)$$

das Minimum im  $m$ -dimensionalen Parameterraum bestimmt. Der Vektor  $\mathbf{b}_k$  entspricht wie aus (4.1) ersichtlich der ersten Ableitung der Zielfunktion  $\chi^2$ . Die zweite Ableitung von  $\chi^2$  lautet

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{\partial F(x_i, \mathbf{a}_0)}{\partial a_j} \frac{\partial F(x_i, \mathbf{a}_0)}{\partial a_k} - [y_i - F(x_i, \mathbf{a}_0)] \frac{\partial^2 F(x_i, \mathbf{a}_0)}{\partial a_k \partial a_j}. \quad (4.9)$$

D.h. unter der Annahme dass die zweiten Ableitungen durch Produkte der jeweiligen ersten partiellen Ableitungen angenähert werden und der zweite Summand in (4.9) nicht berücksichtigt wird, entspricht die Matrix  $\mathbf{A}$  einer approximierten Hessematrix der Zielfunktion  $\chi^2$ . Diese Annahme ist gerechtfertigt und stellt eine gute Approximation dar, solange der aktuelle Wert des Verfahrens nicht zu weit vom Minimum entfernt liegt. In der Nähe des Minimums sollte sich die Zielfunktion zudem annähernd parabolisch, im  $m$ -dimensionalen Parameterraum, verhalten, so dass eine quadratische Entwicklung der

Zielfunktion den tatsächlichen Verlauf der Zielfunktion gut approximieren sollte. In diesem Sinne entspricht Gleichung (4.5) der quadratischen Entwicklung der Zielfunktion und Gleichung (4.8) ist somit gleichbedeutend mit dem Versuch, vom aktuellen Wert mit einer Korrektur direkt ins Minimum zu springen.

Soweit entspricht Gleichung (4.8) dem Gauss-Newton-Verfahren. Der Nachteil von diesem Verfahren ist, dass, wenn der Startvektor  $\mathbf{a}$  relativ weit von dem Minimum entfernt liegt, das Verfahren aufgrund der Annahme einer quadratischen Entwicklung der Zielfunktion nur sehr langsam konvergiert. Bei großen Abstände vom Minimum ist deshalb die Annäherung mit dem einfachen Gradientenabstiegsverfahren sinnvoller. Marquardt (1963) schreibt Gleichung (4.5) dafür in folgender Form

$$\mathbf{b} = (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \Delta \mathbf{a}, \quad (4.10)$$

dabei ist  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix und  $\lambda$  ist ein durch das Minimierungsverfahren zu bestimmender Koeffizient. Wenn der Wert von  $\lambda$  sehr groß wird, ist die Matrix  $(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})$  diagonal dominant und das Verfahren verhält sich wie ein Gradientenabstieg. Wenn hingegen  $\lambda$  gegen Null strebt, geht  $(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})$  in  $\mathbf{A}$  über und das Verfahren geht, unter Ausnutzung der Information der approximierten Hessematrix, über in das Gauss-Newton-Verfahren, so dass schließlich Gleichung (4.8) übergeht in

$$\Delta \mathbf{a} = (\mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b}. \quad (4.11)$$

So kann das Verfahren in Abhängigkeit vom Grad der Annäherung, d.h. von dem Wert der Diskrepanz von Modell zu den Messdaten, eine graduelle Einstellung vom Gradientenabstieg zur Gauss-Newton Methode, durch die Anpassung von  $\lambda$ , vornehmen.

## 5 Response-Funktionen für Stokes-Parameter

In diesem Kapitel werden die Response-Funktionen für die Stokes-Parameter vorgestellt. Response-Funktionen ermöglichen es Informationen zu erhalten über die Empfindlichkeit des Stokes-Spektrums auf kleine Variationen verschiedener Parameter in unterschiedlichen Höhen der Sonnenatmosphäre. Dieses macht Response-Funktionen zu einem leistungsstarken und aussagekräftigen diagnostischen Werkzeug für die Untersuchung von Absorptionslinien in der Sonnenatmosphäre. In dieser Arbeit soll ausgenutzt werden, dass sich die verschiedenen Response-Funktionen verhalten wie die höhenabhängigen partiellen Ableitungen der Stokes-Parameter nach den gesuchten atmosphärischen Parameter. Diese werden dann in dem in Kapitel 4 vorgestellten Verfahren benutzt, um den Gradienten und die approximierte Hesse-Matrix der Zielfunktion (4.1) zu bestimmen.

### 5.1 Definition der Response-Funktionen

Um Informationen über das Verhalten eines nichtlinearen Systems bezüglich der Variation eines seiner Parameter zu erhalten, ist die Linearisierung des Problems eine bevorzugte Methode um das Verhalten in erster Ordnung zu beschreiben. In dieser Weise wurden Response-Funktionen für den Strahlungstransport bereits von Becker und Milkey (1975) beschrieben. Response-Funktionen für den polarisierten Strahlungstransport mit Hilfe der Stokes-Parameter wurden erstmals von Landi Degl'Innocenti und Landi Degl'Innocenti (1977) eingeführt.

Um die Auswirkung einer kleinen Störung eines Parameters auf die Intensität bzw. auf den Stokes-Vektor zu erhalten, wird ausgehend von der Störung  $x_i + \delta x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) des Parameters  $x_i$ , die Gleichung des polarisierten Strahlungstransports (3.55) in erster Ordnung entwickelt :

$$\frac{d}{d\tau} \delta \mathbf{I} = \mathbf{K} \left( \delta \mathbf{I} - \delta \mathbf{S} + \mathbf{K}^{-1} \delta \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \right). \quad (5.1)$$

Die Störung in der totalen Absorptionsmatrix  $\mathbf{K}$  in erster Ordnung ist :

$$\delta \mathbf{K}(\tau) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \delta x_i, \quad (5.2)$$

und die für den Quellvektor  $\mathbf{S}$  :

$$\delta \mathbf{S}(\tau) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} \delta x_i. \quad (5.3)$$

Mit der Einführung des neuen Vektor  $S^*$  :

$$S^* = \delta S + K^{-1} \delta K (I - S), \quad (5.4)$$

lässt sich Gleichung (5.1) schreiben als :

$$\frac{d}{d\tau} \delta I = K (\delta I - S^*). \quad (5.5)$$

Aufgrund der Analogie der Gleichungen (5.5) und (3.55) besitzen die Gleichungen die gleiche formale Lösung, so dass entsprechend der formalen Lösung aus Kapitel 3.6, Gleichung (3.56), die Lösung der Gleichung (5.5) durch :

$$\delta I(0) = \int_0^{\infty} O(0, \tau) K(\tau) S^*(\tau) d\tau \quad (5.6)$$

gegeben ist. Nun kann Gleichung (5.6) unter Berücksichtigung von Gleichung (5.4) ausmultipliziert werden. Mit der Einführung des Vektors  $R_i(\tau)$  :

$$R_i(\tau) = O(0, \tau) \left[ K(\tau) \frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{\partial K}{\partial x_i} (I - S) \right] \quad (5.7)$$

lässt sich dann Gleichung (5.6) schreiben als :

$$\delta I(0) = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} R_i(\tau) \delta x_i(\tau) d\tau. \quad (5.8)$$

Der eingeführte Vektor wird Response-Funktion genannt. Die Response-Funktion gibt somit die Größe der Variation des Stokes-Vektors  $I = (I, Q, U, V)$  an, für eine kleinen Störung des Parameters  $x_i$  in der optischen Tiefe  $\tau$ .

## 5.2 Ableitung der Response-Funktionen

Hier werden nun die Response-Funktionen der Stokes-Parameter aus dem Ausdruck (5.7) für den gesamten Magnetfeldvektor, also die Magnetfeldstärke  $B$ , die Inklination  $\gamma$  (Winkel des Magnetfeldes gegen die Sichtlinie) und der Azimutwinkel  $\chi$  berechnet. Die hier abgeleiteten Ausdrücke für die Response-Funktionen der drei Magnetfeldparameter werden in Teil III der Arbeit dazu benutzt um mit dem Marquardt-Levenberg-Algorithmus eine Inversion der Stokes-Profilen durchzuführen.

### 5.2.1 Die Response-Funktion der Magnetfeldstärke $B$

Um die Response-Funktion der Magnetfeldstärke zu berechnen, muss entsprechend Gleichung (5.7) :

$$\mathbf{R}_i(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \left[ \mathbf{K}(\tau) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \right],$$

die partielle Ableitung des Quellvektor  $\mathbf{S}$  und der totalen Absorptionsmatrix  $\mathbf{K}$  gebildet werden. Da der Quellvektor  $\mathbf{S}$  keine Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke  $B$  besitzt, muss also lediglich die Ableitung der totalen Absorptionsmatrix  $\mathbf{K}$  gebildet werden. So wird zunächst Gleichung (3.42) nach  $B$  abgeleitet :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B} (\kappa_c \mathbf{I} + \kappa_l \boldsymbol{\psi}). \quad (5.9)$$

Da weder der kontinuierliche noch der Linienabsorptionskoeffizient von  $B$  abhängen, reduziert sich (5.9) auf :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial B} = \kappa_l \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial B} = \kappa_l \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_I}{\partial B} & \frac{\partial \psi_Q}{\partial B} & \frac{\partial \psi_U}{\partial B} & \frac{\partial \psi_V}{\partial B} \\ \frac{\partial \psi_Q}{\partial B} & \frac{\partial \psi_I}{\partial B} & \frac{\partial \psi'_V}{\partial B} & -\frac{\partial \psi'_U}{\partial B} \\ \frac{\partial \psi_U}{\partial B} & -\frac{\partial \psi'_V}{\partial B} & \frac{\partial \psi_I}{\partial B} & \frac{\partial \psi'_Q}{\partial B} \\ \frac{\partial \psi_V}{\partial B} & \frac{\partial \psi'_U}{\partial B} & -\frac{\partial \psi'_Q}{\partial B} & \frac{\partial \psi_I}{\partial B} \\ \frac{\partial B}{\partial B} & \frac{\partial B}{\partial B} & \frac{\partial B}{\partial B} & \frac{\partial B}{\partial B} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

So lautet die Response-Funktion der Magnetfeldstärke für die Stokes-Parameter bzw. den Stokes-Vektor :

$$\mathbf{R}_B(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial B} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \text{ bzw. } \mathbf{R}_B(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial B} (\mathbf{I} - \mathbf{S}). \quad (5.11)$$

Die einzelnen Absorptionsprofile der Absorptionsmatrix  $\boldsymbol{\psi}$  sind ihrerseits abhängig von den Voigt-Profilen  $\psi_p, \psi_r, \psi_b$  der einzelnen Zeeman-Komponenten und den Faraday-Voigt-Profilen  $\psi'_p, \psi'_r, \psi'_b$ , wie in Gleichung (3.51) und (3.52) angegeben. So reduziert sich die Ableitung der Absorptionsmatrix  $\boldsymbol{\psi}$  nach  $B$  auf die Ableitung der Voigt-Funktion :

$$\frac{\partial H(a, v - v_j + v_{los})}{\partial B} \text{ und der Faraday-Voigt-Funktion : } \frac{\partial F(a, v - v_j + v_{los})}{\partial B}. \quad (5.12)$$

Um die Ableitungen der Voigt- und Faraday-Voigt-Funktion zu vereinfachen, wird der Ausdruck  $v^* = v - v_j + v_{los}$  eingeführt. Da allein die Zeeman-Aufspaltung  $v_j$  (3.46) und damit  $v^*$  von  $B$  abhängt, lassen sich die Ableitungen schreiben als :

$$\frac{\partial H(a, v^*)}{\partial B} = \frac{\partial H(a, v^*)}{\partial v^*} \frac{\partial v^*}{\partial B}, \text{ bzw. } \frac{\partial F(a, v^*)}{\partial B} = \frac{\partial F(a, v^*)}{\partial v^*} \frac{\partial v^*}{\partial B}. \quad (5.13)$$

Die partiellen Ableitung der Voigt- und der Faraday-Voigt-Funktion bezüglich  $v^*$  lassen sich einfach berechnen und in kompakter Weise schreiben als :

$$\frac{\partial H(a, v^*)}{\partial v^*} = 4a F(a, v^*) - 2v H(a, v^*) \text{ und} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial F(a, v^*)}{\partial v^*} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a H(a, v^*) - 2v F(a, v^*). \quad (5.15)$$

Gemäß Gleichung (5.13) und der Gleichung (3.46) für die Zeeman-Aufspaltung folgt somit für die Ableitung der Voigt-Funktion nach  $B$  :

$$\frac{\partial H(a, v^*)}{\partial B} = \frac{v_j}{B} \cdot (4a F(a, v^*) - 2v^* H(a, v^*)). \quad (5.16)$$

Entsprechend folgt für die Faraday-Voigt-Funktion :

$$\frac{\partial F(a, v^*)}{\partial B} = \frac{v_j}{B} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} - a H(a, v^*) - 2v F(a, v^*) \right), \quad (5.17)$$

wobei  $v_j$  dem Aufspaltungsterm der Zeeman-Komponenten gemäss Gleichung (3.46) entspricht.

## 5.2.2 Die Response-Funktion des Inklinationswinkels $\gamma$

Der Winkel  $\gamma$  beschreibt die Neigung des Magnetfeldes bezüglich der Sichtlinie. Ausgangspunkt ist wieder Gleichung (5.7) :

$$\mathbf{R}_i(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \left[ \mathbf{K}(\tau) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \right].$$

Da auch hier keine Abhängigkeit des Quellvektors  $\mathbf{S}$  vom dem Winkel  $\gamma$  besteht wird auch hier nur die Ableitung der totalen Absorptionsmatrix  $\mathbf{K}$  betrachtet :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} (\kappa_c \mathbf{I} + \kappa_l \boldsymbol{\psi}). \quad (5.18)$$

Der kontinuierliche und der Linienabsorptionskoeffizient besitzen keine Abhängigkeit von  $\gamma$ , so dass nur die Ableitung der Absorptionsmatrix  $\boldsymbol{\psi}$  nach  $\gamma$  betrachtet werden muss :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \gamma} = \kappa_l \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \gamma} = \kappa_l \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_I}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi_Q}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi_U}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi_V}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \psi_Q}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi_I}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi'_V}{\partial \gamma} & -\frac{\partial \psi'_U}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \psi_U}{\partial \gamma} & -\frac{\partial \psi'_V}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi_I}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi'_Q}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \psi_V}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi'_U}{\partial \gamma} & -\frac{\partial \psi'_Q}{\partial \gamma} & \frac{\partial \psi_I}{\partial \gamma} \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

So lautet die Response-Funktion des Winkels  $\gamma$  für den Stokes-Vektor :

$$\mathbf{R}_\gamma(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \gamma} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \text{ bzw. } \mathbf{R}_\gamma(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \gamma} (\mathbf{I} - \mathbf{S}). \quad (5.20)$$

Da die jeweiligen Profile, die Voigt-Profile  $\psi_p, \psi_r, \psi_b$  des Zeeman-Effekts und die Faraday-Voigt-Profile  $\psi'_p, \psi'_r, \psi'_b$  des magnetooptischen Effekts, nicht vom Winkel  $\gamma$  abhängen, sind die jeweiligen Ableitung direkt aus den geometrischen Zusammenhängen der Gleichungen (3.44) zu berechnen.

Die jeweiligen Ableitungen nach  $\gamma$  sind dann gegeben durch :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_I}{\partial \gamma} &= \psi_p \sin \gamma \cos \gamma - \frac{1}{2}(\psi_r + \psi_b) \cos \gamma \sin \gamma \\
\frac{\partial \psi_Q}{\partial \gamma} &= \left[ \psi_p - \frac{1}{2}(\psi_r + \psi_b) \right] \sin \gamma \cos \gamma \cos 2\chi \\
\frac{\partial \psi_U}{\partial \gamma} &= \left[ \psi_p - \frac{1}{2}(\psi_r + \psi_b) \right] \sin \gamma \cos \gamma \sin 2\chi \\
\frac{\partial \psi_V}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{2}(\psi_r - \psi_b) \sin \gamma \\
\frac{\partial \psi'_I}{\partial \gamma} &= \left[ \psi'_p - \frac{1}{2}(\psi'_r + \psi'_b) \right] \sin \gamma \cos \gamma \cos 2\chi \\
\frac{\partial \psi'_U}{\partial \gamma} &= \left[ \psi'_p - \frac{1}{2}(\psi'_r + \psi'_b) \right] \sin \gamma \cos \gamma \sin 2\chi \\
\frac{\partial \psi'_V}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{2}(\psi'_r - \psi'_b) \sin \gamma .
\end{aligned} \tag{5.21}$$

### 5.2.3 Die Response-Funktion des Azimutwinkels $\chi$

Der Azimut beschreibt die Ausrichtung der Magnetfeldlinien senkrecht zur Beobachtungslinie. Ausgangspunkt ist auch hier wieder Gleichung (5.7) :

$$\mathbf{R}_i(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \left[ \mathbf{K}(\tau) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \right].$$

Entsprechend der obigen Ableitung besteht auch hier keine Abhängigkeit des Quellvektors  $\mathbf{S}$  vom dem Azimutwinkel  $\chi$ , so dass auch hier wieder nur die totale Absorptionsmatrix  $\mathbf{K}$  betrachtet werden muss :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} (\kappa_c \mathbf{I} + \kappa_l \boldsymbol{\psi}). \tag{5.22}$$

Auch hier besitzen der kontinuierliche und der Linienabsorptionskoeffizient keine Abhängigkeit von  $\chi$ ,



so dass wiederum nur die Ableitung der Absorptionsmatrix  $\psi$  nach  $\chi$  betrachtet werden muss :

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \chi} = \kappa_l \frac{\partial \psi}{\partial \chi} = \kappa_l \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_I}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi_Q}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi_U}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi_V}{\partial \chi} \\ \frac{\partial \psi_Q}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi_I}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi'_V}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi'_U}{\partial \chi} \\ \frac{\partial \psi_U}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi'_V}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi_I}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi'_Q}{\partial \chi} \\ \frac{\partial \psi_V}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi'_U}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi'_Q}{\partial \chi} & \frac{\partial \psi_I}{\partial \chi} \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

So lautet die Response-Funktion des Winkels  $\chi$  für den Stokes-Vektor :

$$\mathbf{R}_\chi(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \chi} (\mathbf{I} - \mathbf{S}) \text{ bzw. } \mathbf{R}_\chi(\tau) = \mathbf{O}(0, \tau) \frac{\partial \psi}{\partial \chi} (\mathbf{I} - \mathbf{S}). \quad (5.24)$$

Wieder hängen die jeweiligen Profile, die Voigt-Profile  $\psi_p, \psi_r, \psi_b$  des Zeeman-Effekts und die Faraday-Voigt-Profile  $\psi'_p, \psi'_r, \psi'_b$  des magnetooptischen Effekts, nicht vom Winkel  $\chi$  ab. So sind die Ableitungen direkt aus den Winkelfunktionen der Gleichungen (3.44) zu berechnen. Die jeweiligen Ableitungen nach  $\chi$  sind dann gegeben durch :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_I}{\partial \chi} &= 0 \\ \frac{\partial \psi_Q}{\partial \chi} &= - \left[ \psi_p - \frac{1}{2} (\psi_r + \psi_b) \right] \sin^2 \gamma \sin 2\chi \\ \frac{\partial \psi_U}{\partial \chi} &= \left[ \psi_p - \frac{1}{2} (\psi_r + \psi_b) \right] \sin^2 \gamma \cos 2\chi \\ \frac{\partial \psi_V}{\partial \chi} &= 0 \\ \frac{\partial \psi'_Q}{\partial \chi} &= - \left[ \psi'_p - \frac{1}{2} (\psi'_r + \psi'_b) \right] \sin^2 \gamma \sin 2\chi \\ \frac{\partial \psi'_U}{\partial \chi} &= \left[ \psi'_p - \frac{1}{2} (\psi'_r + \psi'_b) \right] \sin^2 \gamma \cos 2\chi \\ \frac{\partial \psi'_V}{\partial \chi} &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

So lassen sich alle Komponenten der Response-Funktionen für die Magnetfeldstärke  $B$  (5.11), des Winkels  $\gamma$  (5.19) und des Winkels  $\chi$  (5.22) angeben und berechnen.

## 6 Künstliche neuronale Netze

Künstliche neuronale Netze als alternatives Berechnungsmodell bieten die Möglichkeit, lineare und nichtlineare Relationen zwischen Daten zu erkennen und deren funktionale Abhängigkeiten nachzubilden. Mit der Fähigkeit, selbst für analytisch nur schwer zu beschreibende Sachverhalte Funktionswerte bzw. Wahrscheinlichkeitsaussagen zu generieren, stellen künstliche neuronale Netze eine Erweiterung der statistischen Analyse sowie der Approximationstheorie dar. In diesem Zusammenhang werden künstliche neuronale Netze in dieser Arbeit benutzt, um Stokes-Linienprofile zu analysieren und eine Inversion durchzuführen. In diesem Kapitel sollen Aufbau, Struktur und Arbeitsweise von künstlichen neuronalen Netzen, vorgestellt werden.

### 6.1 Das biologische Vorbild

Mit künstlichen neuronalen Netzen werden biologische neuronale Netze als informationsverarbeitende Systeme in vereinfachter Weise nachgeahmt. Auch wenn die einzelnen biologischen Modelle des Gehirns und der Nervensysteme von Lebewesen sich in vielen Aspekten unterscheiden, herrscht allgemeine Übereinstimmung darüber, dass das Wesen der Funktion des Nervensystems in der Kontrolle durch Kommunikation besteht. Nervensysteme bestehen aus vielen Tausenden oder Millionen von miteinander vernetzten Nervenzellen - den Neuronen. Jede dieser Zellen ist sehr komplex in ihrem Aufbau und kann eintreffende Signale auf vielfältige Weise verarbeiten. Neuronen sind jedoch langsam im Vergleich zu elektronischen Bausteinen. Während die letzteren Schaltzeiten in der Größenordnung von Nanosekunden besitzen, schalten Neuronen innerhalb einiger Millisekunden. Und trotzdem, kann das menschliche Gehirn Probleme lösen, die für konventionelle Rechner noch in unerreichbarer Ferne liegen. Nervenzellen empfangen Signale – in der Regel elektrische Impulse - und geben neue, von ihnen erzeugte Signale weiter. Die allgemeine Struktur eines generischen Neurons ist in Abbildung 6.1 dargestellt.

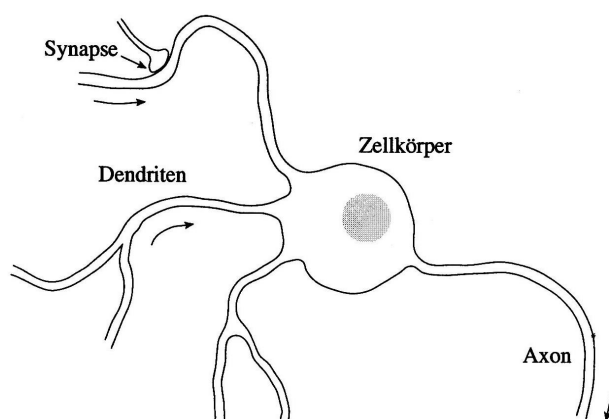


Abbildung 6.1 : Struktur eines Neurons

Die Fortsätze des Neurons, die die Eingangsinformation sammeln, werden Dendriten genannt. Sie übernehmen Signale aus anderen Nervenzellen an spezifischen Kontaktstellen, den Synapsen. Je nach Größe der gesammelten Signale feuert das Neuron seinerseits ein Signal bestimmter Stärke. Die Ausgabesignale eines Neurons werden durch das Axon an andere Neuronen weitergereicht. Diese vier Elemente (Dendriten, Synapsen, Nervenkörper und Axon) bilden die minimale Struktur, die aus dem biologischen Modell für künstliche neuronale Netze übernommen wird. Die Grundelemente künstlicher neuronaler Netze ergeben sich so aus :

- gerichteten und gewichteten Eingabeleitungen,
- einem Berechnungskörper (Berechnungselemente),
- einer Ausgabeleitung.

Abbildung 6.2 zeigt die Struktur eines abstrakten Neurons mit  $n$  Eingängen. Jede Eingabeleitung überträgt einen reellen Wert  $x_i$ . Die primitive Funktion  $f$ , die vom Neuron berechnet wird, kann im Prinzip beliebig ausgewählt werden. Die Eingabeleitungen sind gewichtet, d.h. jeder Eingabewert  $x_i$  wird mit dem entsprechenden Gewicht  $w_i$  multipliziert. Die im Berechnungselement ankommende Information wird addiert, und das Resultat wird als Argument für die primitive Funktion  $f$  verwendet. Ist die Struktur der einzelnen Neuronen auf diese Art spezifiziert, können die einzelnen Elemente zu einem Gesamt-Netzwerk gekoppelt werden.

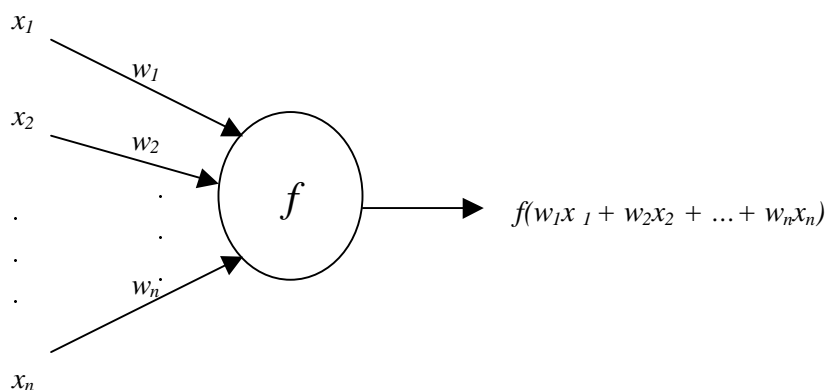


Abbildung 6.2 : Struktur eines künstlichen Neurons

## 6.2 Struktur und Prinzip künstlicher neuronale Netze

Wird jedes Schaltelement in einem neuronalen Netz als eine primitive Funktion aufgefasst, die ihre Eingabe in eine bestimmte Ausgabe verwandelt, so sind künstliche neuronale Netze als Funktionennetze zu betrachten. Verschiedene künstliche neuronale Netze unterscheiden sich im Aufbau im wesentlichen hinsichtlich der Annahme über die einzelnen primitiven Funktionen innerhalb der Berechnungselemente und der Topologie der Vernetzung. Der in dieser Arbeit verwendete Typ von künstlichen neuronalen Netz ist der Multi-Layer Perceptron (MLP). Dies ist der populärste Netztyp in der Anwendung und besitzt sowohl

hervorragende approximierende als auch klassifizierende Eigenschaften. Ein typischer Aufbau des MLP ist in Abbildung 6.3 dargestellt.

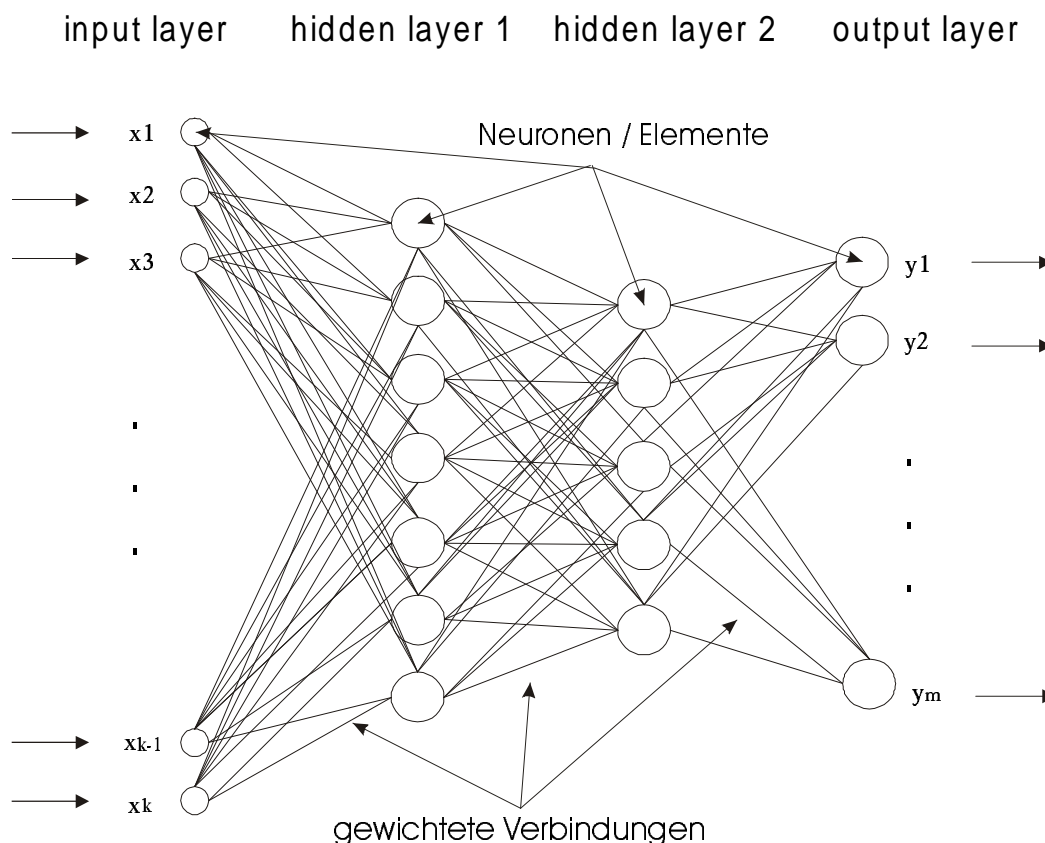


Abbildung 6.3 : Aufbau eines MLP mit  $k$  Eingangselementen, 7 Elementen in der ersten verdeckten Schicht, 5 Elementen in der zweiten verdeckten Schicht und  $m$  in der Ausgabeschicht.

Die einzelnen Berechnungselemente (Neuronen) sind in Schichten angeordnet. Jedes Element einer Schicht  $i$  ist mit jedem Element der nachfolgenden Schicht  $j$  verbunden. Es bestehen aber weder Verbindungen innerhalb einer Schicht, noch werden Elemente zweier nicht benachbarter Schichten miteinander verbunden. Der Informationsfluss in dem Netzwerk ist gerichtet, die Information wird ausgehend von den Elementen der Eingabeschicht (input layer) über die verdeckten Schichten (hidden layer) 1 bis  $n$  an die Ausgabeschicht (output layer) propagiert. Die Anzahl der verdeckten Schichten kann beliebig sein, genauso wie die Anzahl der Elemente innerhalb jeder verdeckten Schicht. Die Anzahl der Eingabeelemente ist genauso wie die Anzahl der Ausgabeelemente problemabhängig. In dieser Arbeit z.B. dient als Eingabe der diskrete Profilverlauf der Stokes-Parameter (I,Q,U,V) über einen gewissen Bereich der Wellenlängen, d.h. jedes Eingabeelement steht für einen Intensitätswert (I,Q,U,V) bestimmter Wellenlänge. Für jede zu erzielende Ausgabe steht ein Element der Ausgabeschicht zur Verfügung. So z.B. je ein Ausgabeelement für einen physikalischen Parameter wie Magnetfeldstärke, Inklination, Azimut, Dopplergeschwindigkeit und Mikroturbulenz.

Der Informationsfluss zwischen den Schichten findet über die Verbindungen statt. Die einzelnen Verbindungen zwischen den Elementen sind gewichtet, so dass wie oben beschrieben jeder Informationsfluss vom  $i$ -ten Element zum  $j$ -ten Element der Nachfolgerschicht mit dem jeweiligen Gewicht  $w_{ij}$  der Verbindung multipliziert wird. An jedem Element (mit Ausnahme des Eingangsschicht) wird die eintreffende Information der Elemente der Vorgängerschicht aufsummiert und dient dann als Argument der primitiven Funktion  $f$ . Der dann berechnete Funktionswert wird wiederum über die gewichteten Verbindungen an die Elemente der Nachfolgerschicht übermittelt und dient dann seinerseits als Eingabewert. Die meist benutzte primitive Funktion, auch Aktivierungsfunktion genannt, innerhalb der Berechnungselemente bei MLP-Netzwerken ist die Sigmoidfunktion. Die Funktion besitzt folgende Definition :

$$s_c = \frac{1}{1 + e^{-cx}}, \quad (6.1)$$

wobei  $x$  der aufsummierten Eingabe aller Vorgängerelemente entspricht und  $c$  eine Konstante ist, die den Anstieg der Funktion bestimmt. Der Definitionsbereich erstreckt sich von  $-\infty$  bis  $+\infty$  und der Abbildungsbereich liegt im offenen Intervall  $[0,1]$ . Der Funktionsverlauf ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

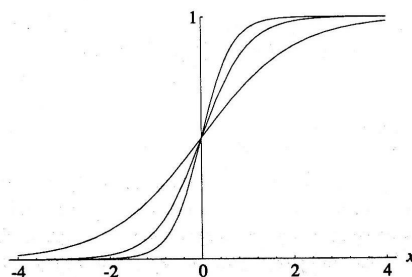


Abbildung 6.4 : Verlauf der Sigmoidfunktion (für  $c=1, c=2, c=3$ )

Die Motivation für diesen Funktionsverlauf ist zum einen biologisch bedingt, da bei biologischen Neuronen typischerweise Schwellwertaktivierungen vorliegen, d.h. dass die Aktivierung bzw. das Feuern einer neuen Information an benachbarte Neuronen abhängig ist von dem Überschreiten einer bestimmten Stärke der Eingangssignale. Die Sigmoidfunktion imitiert in dieser Weise das biologische Modell durch eine kontinuierliche stetige Funktion. Zum anderen hat die Sigmoidfunktion den Vorteil, dass sie nichtlinear ist, so dass die gesamte Netzwerkfunktion, zusammengesetzt durch die Komposition der einzelnen Sigmoidfunktionen der Neuronen, ebenfalls einer nichtlinearen Funktion entspricht. Zum anderen ist die Sigmoidfunktion stetig und differenzierbar, was eine notwendige Bedingung für die später in Abschnitt 6.4 vorgestellten Lernmethode, dem Backpropagation-Algorithmus, ist. Es gibt eine Reihe verschiedener Aktivierungsfunktionen, die ebenfalls die angegebenen Eigenschaften besitzen und in neuronalen Netzen verwendet werden, doch ist die Sigmoidfunktion die gebräuchlichste für das MLP-Netzwerk (Hecht-Nielsen 1990).

### 6.3 Funktionsapproximation mit neuronalen Netzen

Aus dem vorangegangenen wird klar das künstliche neuronale Netze als Funktionennetze betrachtet werden können. Die Aufgabe des künstlichen neuronalen Netzes besteht darin, anhand von Ein-Ausgabepaaren – Trainingsdaten genannt – die den Daten zugrundeliegende funktionale Abhängigkeit zu erkennen und diese zu approximieren. Die gesuchte funktionale Abhängigkeit entspricht der Abbildung  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwischen dem k-dimensionalen Eingaberaum und dem m-dimensionalen Ausgaberaum.

Die Approximierung durch das künstliche neuronale Netz entspricht einer nichtlinearen Funktion  $\Phi(\mathbf{I}, \mathbf{W}_i)$  der Parameter  $\mathbf{I}$  und  $\mathbf{W}_i$ , wobei der Vektor  $\mathbf{I}$  die Eingabe von Außen in das Netzwerk darstellt, wie z.B. in dieser Arbeit der diskrete Profilverlauf der Stokes-Parameter über die Wellenlänge. Die Matrix  $\mathbf{W}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) enthält die Information der Verbindungsgewichte zwischen jedem Elementen der ( $i$ )-ten und jedem Element der ( $i+1$ )-ten Schicht, der Index  $i$  läuft über alle Schichten des Netzes. Die Funktion  $\Phi(\mathbf{I}, \mathbf{W}_i)$  definiert sich dann über die mehrfache Komposition der einzelnen primitiven Funktionen.

Das Lernproblem besteht dann darin, jene Funktion  $\Phi(\mathbf{I}, \mathbf{W}_i)$  zu finden, die die Trainingseingabewerte am genauesten den entsprechenden Trainingsausgabewerten zuordnet. Die freien Parameter der Netzfunktion  $\Phi(\mathbf{I}, \mathbf{W}_i)$  sind durch die Gewichte  $\mathbf{W}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) des neuronalen Netzes gegeben. Optimale Gewichte sind diejenigen, welche die „beste“ Anpassung der Netzausgabe an die vorgegebenen Ausgabewerte vornehmen. Jedoch spielen zwei entgegengesetzte Motivationen eine Rolle. Einerseits soll das Netz nach der Lernphase die Trainingseingabewerte möglichst genau auf die Ausgabewerte abbilden. Andererseits wird aber erwartet, dass das Netz verallgemeinern kann, d.h. es muss für unbekannte Eingabewerte eine Ausgabe produzieren, die eine Art Interpolation der Ausgabe aller bekannten Eingaben ist.

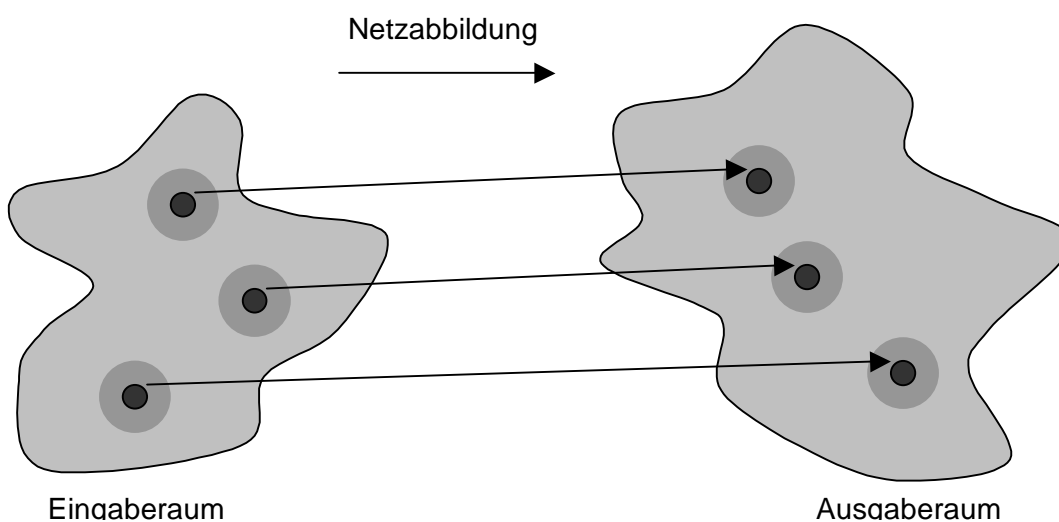


Abbildung 6.5 : Abbildung unter Erhalt der Nachbarschaftsbeziehungen

Abbildung 6.5 veranschaulicht, wie ein Netz den Eingaberaum in einen Ausgaberaum abbildet. Die schwarzen Punkte im Eingaberaum stellen die Trainingseingaben dar, die auf

die Trainingsausgaben (schwarze Punkte im Ausgaberaum) abgebildet werden sollen. Es ist aber auch erwünscht, dass die Nachbarschaft der Trainingseingaben auf Nachbarschaften der Trainingsausgaben abgebildet werden. Eine für das Netz unbekannte Eingabe, die dicht an einer trainierten Eingabe liegt, soll in der Nähe der trainierten Ausgabe abgebildet werden. Das Netz soll also eine stetige Abbildung des Eingaberaums in den Ausgaberaum berechnen. Wenn die primitiven Funktionen in den Berechnungselementen des künstlichen neuronalen Netzes stetig sind, so ist die Komposition (Verschachtelung) der primitiven Funktionen, also die Netzwerkfunktion, ebenfalls stetig und die obige Forderung ist erfüllt (Rojas 1993).

Wie gut können nun künstliche neuronale Netze einen funktionalen Zusammenhang überhaupt darstellen? Ein altes Problem der Approximationstheorie besteht darin, eine vorgegebene Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch die Komposition primitiver Funktionen exakt oder annähernd auszudrücken. Ein klassisches Beispiel ist die Approximation von eindimensionalen Funktionen mittels Polynomen (z.B. Taylorsche Reihe) oder Fourierreihen. Im Unterschied zur Approximation mit Taylorschen- oder Fourierreihen ist bei künstlichen neuronalen Netzen die zu modellierende Funktion  $F$  nur indirekt, d.h. anhand einiger Ein-Ausgabepaare bekannt. So ist die Abbildung  $F$  nur an einigen Stellen bekannt, und es soll die bestmögliche Verallgemeinerung daraus abgeleitet werden. Im Falle der Taylorschen Reihe kann die Methode der kleinsten Quadrate benutzt werden. Im Falle eines künstlichen neuronalen Netzes wird ein Lernalgorithmus verwendet. Dafür wird ein zufälliger Satz von Gewichten ausgewählt und dann so lange iterativ angepasst, bis das Funktionennetz – neuronale Netz - die gesuchte Funktion optimal approximiert.

Eine entscheidende Frage für die Anwendung ist, ob es prinzipiell gelingt, mit künstlichen neuronalen Netzen, bzw. mit einem Funktionennetz, jede beliebige stetige Funktion zu approximieren. Ein klassisches Resultat vom russischen Mathematiker Kolmogorov aus dem Jahr 1957 zeigt, dass stetige Funktionen von  $n$  Argumenten immer durch eine endliche Verschachtelung (Komposition) von eindimensionalen Funktionen und deren Addition darstellbar sind (Sprecher 1964). Basierend auf diesem Satz wurden für künstliche neuronale Netze eine Reihe weiterer wichtiger Sätze formuliert. Wie Hornik, Stinchcombe und White (1990) in ihrem Artikel : *Multilayer feedforward networks are universal approximators*, beschreiben, gilt für Multi-Layer-Perceptronen mit der Sigmoidfunktion als Aktivierung, dass jede stetige quadratintegrale Funktion  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ , im Rahmen des quadratischen Fehlers beliebig genau durch ein Multi-Layer-Perceptron mit einer verdeckten Schicht approximiert werden kann.

Diese prinzipiellen Fähigkeiten künstlicher neuronaler Netze als universelle Approximatoren geben aber keine Hinweise darauf, wie die geeignete Netzarchitektur, d.h. wie hoch die Anzahl der verdeckten Schichten und wie hoch die Anzahl der in jeder Schicht enthaltenen Elemente (Neuronen) im konkreten Anwendungsfall sein soll. Weiterhin gibt dieser Satz nicht an, ob und wie die optimalen Gewichte des Netzes zu finden sind. In der bisherigen Praxis ist es im wesentlichen ein experimentelles „Trial and Error-Verfahren“, das zu einer geeigneten Netzarchitektur führt. Das Auffinden geeigneter Netzwerkgewichte wird von dem Lernalgorithmus durchgeführt. Dabei bedeutet geeignet nicht, dass die optimalen

Netzwerkparameter gefunden werden müssen, sondern dass eine Einstellung gefunden wird, so dass der Aussagefehler des neuronalen Netzes innerhalb problemabhängiger akzeptabler Grenzen liegt.

Nach der Anpassung der Netzwerkparameter durch den Trainingsprozess werden die Netzwerkparameter eingefroren. Das Netz wird dann in der Anwendungsphase dazu benutzt, aus unbekanntem Eingabenvektoren, im Sinne der gefundenen Approximation, Ausgaben zu generieren.

## 6.4 Der Backpropagation-Algorithmus

Der Backpropagation-Algorithmus wurde 1985 von Rumelhart (Rumelhart & McClelland 1986) vorgestellt. Seitdem ist er zu einer der am weitest verbreiteten Lernmethoden für künstliche neuronale Netze geworden. Der Backpropagation-Algorithmus entspricht einer nichtlinearen Optimierung der Netzfunktion  $\Phi(\mathbf{I}, \mathbf{W}_i)$  d.h. Backpropagation sucht das Minimum der Fehlerfunktion  $E$  eines bestimmten Lernproblems durch Abstieg in negativer Gradientenrichtung im Gewichtsraum. Die Kombination derjenigen Gewichte eines Netzes, die den Berechnungsfehler minimiert, wird als Lösung des Lernproblems betrachtet. Der Gradient der Fehlerfunktion muss also für alle Punkte des Gewichtsraums existieren, d.h. die partiellen Ableitungen der Fehlerfunktion nach den einzelnen Gewichten müssen überall definiert sein. Dies wird bei einem Multi-Layer-Perceptron mit der Sigmoidfunktion als Aktivierung gewährleistet. Die Parameter der Berechnung bei fester Netzarchitektur, d.h. einer festen Anzahl verdeckter Schichten und Elemente, sind die Netzgewichte, die am Anfang zufällig ausgewählt werden. Die vom Netz implementierte Netzfunktion soll wieder  $\Phi(\mathbf{I}, \mathbf{W}_i)$  sein. Gegeben ist die Trainingsmenge von  $n$  Ein-Ausgabepaaren bzw. Ein-Ausgabevektoren  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  mit  $x_i \in \mathbb{R}^k$   $y_j \in \mathbb{R}^m$ . Der Trainingsausgabevektor soll im folgenden Zielvektor genannt werden, um Verwechslungen mit dem vom Netz berechneten Ausgabevektor, der Netzfunktion, zu vermeiden. Somit kann der quadratische Fehler  $E$  wie folgt berechnet werden :

$$E = \frac{1}{2}(y_1 - \Phi(x_1, \mathbf{w}))^2 + \frac{1}{2}(y_2 - \Phi(x_2, \mathbf{w}))^2 + \dots + \frac{1}{2}(y_n - \Phi(x_n, \mathbf{w}))^2$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [y_i - \Phi(x_i, \mathbf{w})]^2 \quad (6.2)$$

Die Einführung des Faktors  $\frac{1}{2}$ , dient nur zu formalen Zwecken aufgrund der späteren Berechnung der partiellen Ableitungen. Die Minimierung der Fehlerfunktion  $E$  entspricht dann dem Aufsuchen der partiellen Ableitung der Fehlerfunktion nach jedem der  $s$  Netzgewichte  $w_i$  des Netzwerks:

$$\nabla E = \left( \frac{\partial E}{\partial w_1}, \frac{\partial E}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial E}{\partial w_s} \right) = 0. \quad (6.3)$$



Jeder einzelne Summand in Gleichung (6.2) entspricht also der quadratischen Diskrepanz der Netzberechnung  $\Phi(x_n, w)$  gegenüber dem vorgegebenen Zielvektor  $y_n$ . Der Wert der Netzfunktion ist gegeben durch die  $k$  Ausgabeelemente des Ausgabevektors  $o_n$  des Netzes. Der Fehler für das erste Trainingspaar  $(x_{1n}, y_{1n})$  lässt sich wie in Abbildung 6.6 dargestellt berechnen.

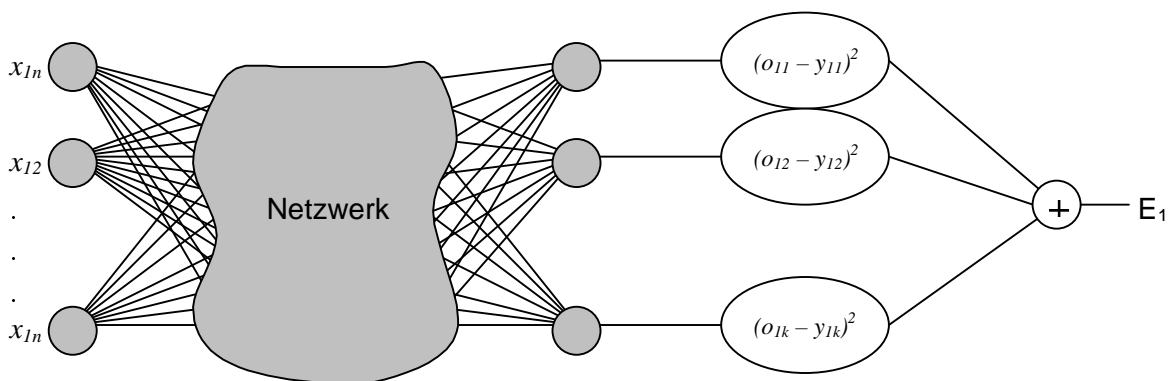


Abbildung 6.6 zeigt die Fehlerberechnung in einem Netzwerk für ein Trainingspaar.

Somit lässt sich die Fehlerfunktion E für das erste Trainingspaar schreiben als :

$$E_1 = (o_{11} - y_{11})^2 + (o_{12} - y_{12})^2 + \dots + (o_{1k} - y_{1k})^2. \tag{6.4}$$

Nun gilt zu beachten, dass sich hinter der Netzausgabe  $o_{ij}$  der  $j$ -ten Komponente eine mehrfache Verschachtelung von Sigmoidfunktionen (6.1) verbirgt. Die einzelnen Eingänge in jedes Element (Neuron) werden aufsummiert und dann als Argument für die Aktivierung, also der Sigmoidfunktion, genutzt. Der Funktionswert der Sigmoidfunktion wird anschließend über die gewichteten Verbindungen (Multiplikation mit den Netzgewichten) an andere Neuronen der Nachbarschicht geschickt die dann ihrerseits entsprechende Berechnungen durchführen. So erhält man eine mehrfache Verschachtelung (Komposition) von Sigmoidfunktionen bis zur Ausgabeschicht und somit bis zum Ausgabeelement  $o_{ij}$ . Abbildung 6.7 zeigt ein sehr einfaches Schema der Verschachtelung mit zwei Neuronen (Elemente).

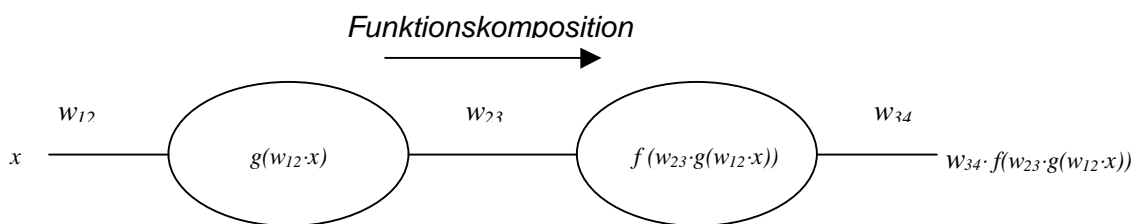


Abbildung 6.7 : Einfaches Schema der Funktionskomposition

Der Backpropagation-Algorithmus berechnet, ausgehend vom Fehler  $E$  (6.2) auf der Grundlage der Kettenregel der Differentialrechnung, die partiellen Ableitungen der Fehlerfunktion  $E$ , nach den Netzgewichten, sukzessiv von der Ausgabeschicht über die verschiedenen verdeckten Schichten bis hin zur Eingabeschicht zurück. Aufgrund der Einfachheit der Sigmoidfunktion (6.1) und deren Ableitung lässt sich die entsprechende Ableitung bereits bei der Vorwärtsberechnung in den jeweiligen Elementen abspeichern. Abbildung 6.8 zeigt das Schema des Backpropagation an dem gleichen einfachen Beispiel wie in Abbildung 6.7.

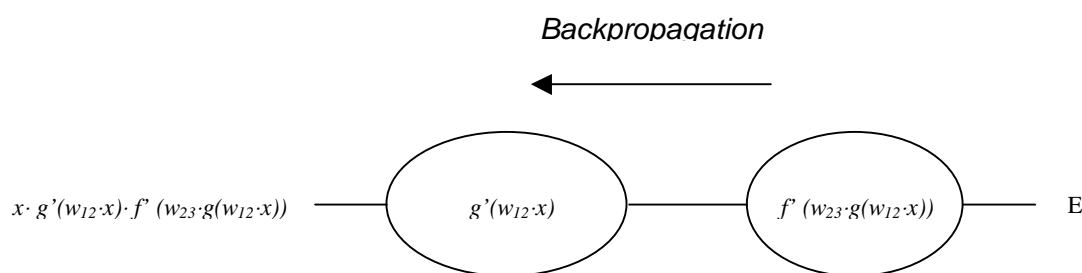


Abbildung 6.8 : Einfaches Schema Backpropagation

Nach dem Rückwärtsdurchlauf des Backpropagation-Algorithmus, ist das Endresultat  $x \cdot g'(w_{12} \cdot x) \cdot f'(w_{23} \cdot g(w_{12} \cdot x))$  die gewünschte partielle Ableitung der Funktionskomposition nach den jeweiligen Gewicht, hier  $w_{12}$ . Somit besteht aufgrund der Kettenregel der Backpropagation-Algorithmus im wesentlichen in einer Rückwärtsverfolgung bis zum gewünschten Netzwerkgewicht, über die gewichteten Verbindungen des Netzwerkes und der jeweiligen Multiplikation der in jedem Neuron gebildeten partiellen Ableitungen. Zu beachten gilt jedoch das es sich bei größeren und komplexeren neuronalen Netzen um in mehreren Schichten parallel angeordnete Neuronen und Gewichte handelt, deren Anzahl durchaus mehrere tausend betragen kann.

Mit den berechneten partiellen Ableitungen nach den einzelnen Netzgewichte  $w_i$  des Netzwerkes, werden die jeweiligen Korrekturen dieser Gewichte, anhand der Bedingung (6.3), berechnet. So wird ein Schritt in Richtung des negativen Gradienten der Fehlerfunktion (6.2) gegangen, der durch :

$$w_t = w_{t-1} - \gamma \nabla E, \tag{6.5}$$

ausgedrückt wird. Dabei sind die einzelnen Gewichte des Netzes als Vektor zusammengefasst. Der neue Gewichtsvektor  $w_t$  wird so aus dem vorherigen  $w_{t-1}$  und dem Gradienten der Fehlerfunktion sowie einem dem Wert  $\gamma$  für die Schrittweite berechnet. Der Backpropagation-Algorithmus besteht somit aus folgenden vier Schritten :

1. Vorwärtsberechnung aufgrund der Trainingseingabe der Vektoren  $x_i$  ( $i=1,..n$ ),
2. Fehlerberechnung für alle n Trainingseingaben,

3. Backpropagation durch alle Schichten für die Berechnung der partiellen Ableitungen aller Netzgewichte,
4. Korrektur der Gewichte.

Diese vier Schritte werden mehrmals für die gesamte Trainingsdatenmenge durchlaufen um so iterativ eine stetige Verbesserung des Fehlerverhaltens zu erreichen. Das Verfahren wird solange fortgesetzt bis keine signifikante Änderung des Fehlers mehr erzielt wird oder bis ein zufriedenstellendes Aussageverhalten erreicht wurde.

Für eine genaue Herleitung des Backpropagation-Algorithmus im Zusammenhang mit Multi-Layer-Perceptronen siehe Hecht-Nielsen (1990). Da der Backpropagation-Algorithmus ein Gradientenabstiegsverfahren ist und somit zu den lokalen Optimierungsverfahren gehört, besteht prinzipiell die Gefahr, dass der Algorithmus in einem suboptimalen lokalen Minimum stecken bleibt. Weiterhin kann eine zu klein bzw. zu groß gewählte Schrittweite zu einer schlechten Konvergenz führen. Eine Reihe von verbesserten Backpropagation-Algorithmen sind in den letzten Jahren entwickelt worden, um bessere Konvergenz und eine Beschleunigung des Verfahrens zu erreichen (Rojas 1993). In dieser Arbeit wird ein verbesserter Backpropagation-Algorithmus auf der Grundlage des in Kapitel 4.2 vorgestellten Levenberg-Marquardt-Algorithmus verwendet. Dieser ist zwar rechenintensiver - durch die Berechnung der angenäherten Hessematrix der Fehlerfunktion  $E$  (6.2) - als der herkömmliche Backpropagation-Algorithmus, braucht aber dafür in den meisten Fällen weit weniger Iterationsschritte für das Auffinden des Optimums.

## 6.5 Klassifikationen mit neuronalen Netzen

Eine Klassifikation kann zunächst als eine Abbildung  $C : \mathbb{R}^n \rightarrow K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  aufgefasst werden. Jedem Eingangsvektor  $\mathbf{x}$  wird ein Element der Menge  $K$  zugeordnet. Die Aufgabe des neuronalen Netzes als Klassifikator ist die Bestimmung der bedingte Wahrscheinlichkeit das es sich beim anlegen des Vektors  $\mathbf{x}$  um ein Objekt der Klasse  $k_i$  handelt. Es gilt also die a-posteriori Wahrscheinlichkeit  $p(k_i/\mathbf{x})$  zu berechnen. Ausgehend von der Fehlerfunktion (6.2) kann im Grenzfall einer unendlichen Datenmenge eine optimale Lösung für diese gefunden werden (Bishop 1994). Für den Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  :

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^c [k_{il} - \Phi_l(x_i, \mathbf{w})]^2, \quad (6.6)$$

kann die Zielfunktion durch das Integral über die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  ersetzt werden :

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^c \int_{\mathbf{x}'} \int [k_l - \Phi_l(\mathbf{x}, \mathbf{w})]^2 p(\mathbf{k}, \mathbf{x}) d\mathbf{k} d\mathbf{x}. \quad (6.7)$$

Die Minimierungsbedingung (6.3) lässt sich auch formal durch,

$$\frac{\partial E}{\partial \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{w})} = 0, \quad (6.8)$$

angeben.

Durch einsetzen von (6.7) in (6.8) und Ausführung der Minimierungsbedingung folgt :

$$\int \int_{\mathbf{x}'} \Phi_l(\mathbf{x}, \mathbf{w}) p(\mathbf{k} / \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{k} d\mathbf{x} = \int \int_{\mathbf{x}'} k_l p(\mathbf{k} / \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{k} d\mathbf{x} . \quad (6.9)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichte für das gemeinsame Eintreten von  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{x}$  durch :

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = p(\mathbf{k} / \mathbf{x}) p(\mathbf{x}), \quad (6.10)$$

ausdrücken lässt. Die Ausführung der Integration über  $\mathbf{k}$  in (6.9) ergibt :

$$\Phi_l(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \langle k_l / \mathbf{x} \rangle . \quad (6.11)$$

Dabei wurde der bedingte Durchschnitt von  $\mathbf{k}$  wie folgt definiert :

$$\langle k_l / \mathbf{x} \rangle \equiv \int k_l p(\mathbf{k} / \mathbf{x}) d\mathbf{k} . \quad (6.12)$$

Im Falle der Klassifizierung wird für das Training der Klassifikationsausgabe mit  $c$  verschiedenen Klassen nur jeweils eine davon auf eins geschaltet. Das heißt wenn die Eingabe  $\mathbf{x}$  zur Klasse  $k_l$  gehört, ist  $k_l = 1$  und  $k_j = 0$  für alle  $j$  ungleich  $l$ . Daraus ergibt sich im diskreten Fall für (6.12) :

$$\int k_l p(\mathbf{k} / \mathbf{x}) d\mathbf{k} = \sum_{j=1}^c k_l p(k_j / \mathbf{x}) = p(k_l / \mathbf{x}) . \quad (6.13)$$

Damit folgt dann für (6.11) wiederum :

$$\Phi_l(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = p(k_l / \mathbf{x}) . \quad (6.14)$$

Womit gezeigt ist, dass die Minimierung der Fehlerfunktion (6.2) des neuronalen Netzes dem Auffinden der bedingten Wahrscheinlichkeit  $p(k_l / \mathbf{x})$  entspricht. Also der Wahrscheinlichkeit, dass es sich beim Anlegen des Vektors  $\mathbf{x}$  um ein Objekt der Klasse  $k_l$  handelt. Anschaulich

wird dabei der  $n$ -dimensionale Eingaberaum in verschiedene Bereiche bzw. Klassen aufgeteilt. Das neuronale Netz bestimmt somit die Zugehörigkeit eines Eingabevektors zu einem bestimmten Bereich des Eingaberaums.

Da die Ausgabe jedes einzelnen Ausgabeelements durch die Sigmoidfunktion auf den Abbildungsbereich  $[0,1]$  beschränkt ist, kann der Wert jedes Ausgabeelement unmittelbar als bedingten Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, dass der Eingabevektor zu der jeweiligen Klasse gehört, die das Ausgabeelement repräsentiert (Richard und Lippmann 1991). Nach einem vorangegangenen Trainingsprozess, soll das neuronale Netz die Verteilungsfunktion des Eingaberaums, bezüglich einer vorher bestimmten Klassifizierung, durch geeignete Trainingsvektoren erlernt haben und in der Lage sein, für unbekannte Eingabevektoren die Wahrscheinlichkeiten anzugeben, dass diese zu einer bestimmten Klasse gehören. Jede Klasse wird dabei durch ein Ausgabeelement repräsentiert. Folgende Abbildung 6.9 zeigt den typischen Aufbau eines Klassifikationsnetzes.

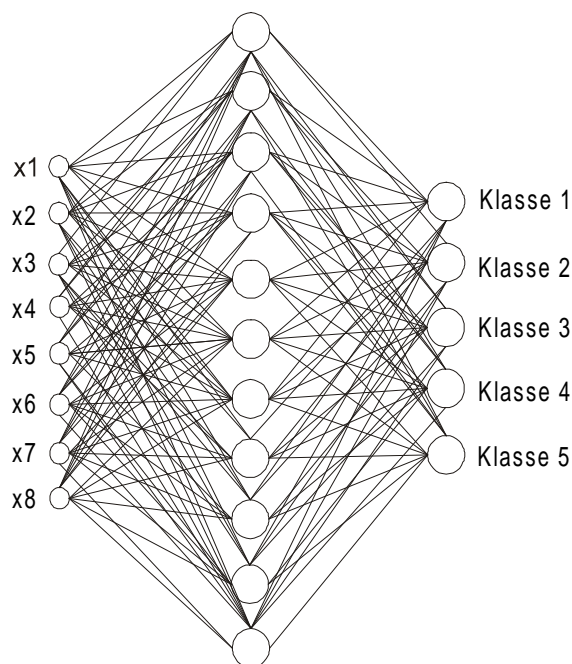


Abbildung 6.9 : Allgemeine Struktur eines Klassifikationsnetzes

Die Güte der Aussage ist aber begrenzt durch die oben gemachten Annahmen einer unendlichen Datenmenge. Es gilt also auch hier wie bei den Approximationsnetzwerken den Eingaberaum (Merkmalsraum) optimal abzudecken um die zugrundeliegende Modellfunktion bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilung der Klassen aus den Trainingsdaten für das neuronale Netz erkennbar zu machen. Die Anwendung eines Klassifikationsnetzwerks bietet insbesondere bei schlecht gestellten inversen Problemen die Möglichkeit probabilistische Aussagen zu generieren und diese für den weiteren Berechnungsprozess zu nutzen. Ein Multi-Layer-Perceptron mit dem Backpropagation-Lernalgorithmus soll in Teil III dazu verwendet werden, anhand der Profilverläufe der Stokes-Parameter, verschiedene Temperaturmodelle der Umbra zu bestimmen.

## 6.6 Generalisierung

Im folgenden soll kurz erläutert werden, welche Grundvoraussetzungen beachtet werden müssen, um eine gute Generalisierung bzw. Verallgemeinerungsfähigkeit des künstlichen neuronalen Netzes zu erhalten. Damit ist gemeint, in wie weit das Netz in der Lage ist, auf unbekannte Eingaben in der Weise zu reagieren wie es durch die funktionelle Abhängigkeiten der Trainingsmenge vorgegeben war. Insbesondere sind mindestens drei Bedingungen zu erfüllen, um ein gutes Generalisierungsverhalten mit Hilfe eines künstlichen neuronalen Netzes zu gewährleisten.

1. Das Netzwerk muss ausreichend viele freie Netzwerkparameter (Gewichte) besitzen, um der Komplexität des Problems gerecht zu werden, unter Umständen in mehreren Schichten angeordnet.
2. Es muss eine ausreichende Zahl an Trainingsdaten vorhanden sein um das Problem überzubestimmen. Konkret bedeutet das, dass die Anzahl der Trainingsdaten die Anzahl der freien Parameter des Netzes, also der Gewichte, übersteigen muss (Hecht-Nielsen 1992).
3. Die Trainingsdaten müssen den gesuchten funktionalen Zusammenhang zwischen Eingabe- und Ausgaberaume widerspiegeln.

Jede Trainingsmenge besteht aus einer endlichen Anzahl von Ein-Ausgabevektoren, die nur eine Approximation aus der wahren Verteilung darstellen. Zwischen den einzelnen Punkten aus der Trainingsmenge muss das Netz also interpolieren. Der Backpropagation-Algorithmus kann aber nicht garantieren, die optimale Interpolation zu finden. Das ist der Preis, der zu zahlen ist, wenn man einen völlig allgemeinen Algorithmus ohne Annahmen über die Verteilung benutzt. Das Generalisierungsverhalten, d.h. das Verhalten des Netzes auf unbekannte Eingabevektoren, ist zwar meist sehr gut, zeigt jedoch eine charakteristische Besonderheit. Prüft man während des Trainings mit einer unabhängigen Testmenge den Generalisierungsfehler, so wird irgendwann ein Minimum erreicht, in welchem das Netz am besten generalisiert, danach steigt der Fehler für die unabhängige Testmenge wieder an, obwohl sich der Fehler für die Trainingsmenge weiter verringert. Dieses Verhalten wird Overtraining genannt. Es hängt entscheidend vom Verhältnis der Gesamtzahl an Gewichtsparametern zu der Anzahl an Trainingsmustern ab (Judd 1990). Theoretisch ist das Generalisierungsverhalten noch nicht gut verstanden. Eine zwanglose Erklärung ergibt sich jedoch damit, dass das Netz zunehmend die statistischen Eigenheiten und Fluktuationen der Trainingsmenge erlernt. Zu Beginn wird eine gute Anpassung an das der Trainingsmenge zugrundeliegende funktionale Verhalten erreicht, doch beginnt das Netz mit fortschreitender Trainingsdauer, Fehlern und statistischen Ausreißern innerhalb der Trainingsmenge mehr und mehr Gewicht zuzuordnen und verzerrt somit den eigentlichen funktionalen Charakter zwischen Eingabe- und Ausgaberaum. Eine in der Praxis übliche Methode gegen das Overtraining ist die ständige Überprüfung des Generalisierungsverhalten während des Trainings mit einer Test- bzw. Validierungsdatenmenge. Dabei wird während des Trainings dem neuronalen Netz in bestimmten Intervallen ein Datenmenge mit unbekanntem, d.h. vom

---

Netz vorher nicht trainierten, Datenpaaren präsentiert und das Aussageverhalten gemäß des Fehlers (6.2) untersucht. Ein Abbruchkriterium des Trainingsprozesses ist das plötzliche Wiederanstiegen des Fehlers für die Validierungsdatenmenge und der damit verbundenen Verschlechterung der Generalisierungseigenschaften.

## Teil III Analyse und Inversion

### 7 Physikalische Randbedingungen

In diesem Kapitel sollen zunächst diejenigen Parameter ausgewählt werden, die es durch die zu entwickelnde Inversion auf der Basis der neuronalen Netze und Response-Funktionen zu bestimmen gilt. Weiterhin werden die Absorptionslinien beschrieben, auf deren Basis die Inversion der Stokes-Parameter durchgeführt wird. Im Anschluss daran werden verschiedene Modellatmosphären vorgestellt und deren Einfluss auf die Stokes-Parameter beschrieben. Zum Schluss soll eine kurze Darstellung des Strahlungstransportprogramm DIAMAG gegeben werden, das zur Erzeugung von synthetischen Stokes-Linienprofilen genutzt wird und das die Grundlage für die Erweiterung zum Inversionsprogramm auf der Basis von Response-Funktionen bildet.

#### 7.1 Auswahl geeigneter Inversionsparameter

Die Auswahl geeigneter physikalischer Parameter für die Inversion mit Hilfe von künstlichen neuronalen Netzen und der anschließenden Inversion auf der Basis von Response-Funktionen geschieht unter Berücksichtigung von drei Aspekten. Erstens sollte die Anzahl der zu bestimmenden Parameter nicht zu hoch sein, da so die Wahrscheinlichkeit erhöht wird, dass sich auf der Hyperfläche des Zielfunktionals  $\chi^2$  (4.1) zunehmend lokale Minima ausbilden (Polak 1971). Zweitens müssen die Parameter aufgrund der in Kapitel 3 vorgestellten Gleichungen für den polarisierten Strahlungstransport geeignete Reaktionen in den Profilformen hervorrufen. Drittens müssen die Parameter und die entstehenden Profilformen durch das Syntheseprogramm berechenbar und darstellbar sein. Denn diese bilden zum einen die Grundlage für die Erzeugung von Trainingsdaten, anhand derer das neuronale Netz trainiert wird, und zum anderen wird dieses Programm als Grundlage für die Erweiterung zum Inversionsprogramm genutzt.

Eine der Hauptaufgaben jeder Inversion von Stokes-Linienprofilen ist die Ermittlung des Magnetfeldvektors, d.h. der Magnetfeldstärke, der Inklination - die Neigung der Feldlinien gegen die Sichtlinie - und des Azimutwinkels. Dabei hinterlässt der Magnetfeldvektor an mehreren Stellen der Stokes-Linienprofile seine charakteristischen Spuren. Bei der Betrachtung des normalen Zeeman-Effektes führt die Magnetfeldstärke gemäss der Gleichung (3.46)

$$v = \frac{B}{\Delta\lambda_D} \left( \frac{e\lambda_0^2}{4\pi m_e c^2} \right) g_J \Delta M_J,$$



zu einer Aufspaltung des Linienprofils, welche proportional zu Magnetfeldstärke  $B$  ist. Dadurch, dass die aufgespaltenen Komponenten durch den Zeeman-Effekt polarisiert werden, verteilen sich die Effekte der Aufspaltung im allgemeinen Fall auf alle vier Stokes-Parameter. Ebenso hinterlassen Winkeländerungen in der Inklination  $\gamma$  als auch im Azimut  $\chi$  über die Gleichungen (3.44) ihre Wirkung an den Stokes-Linienprofilen. Diese sorgen so unter anderem für eine Änderung in der Intensität der jeweiligen Stokes-Parameter. Die folgenden Abbildungen 7.1 und 7.2 verdeutlichen die Effekte der Änderung der Magnetfeldstärke und der Inklination am Beispiel der Stokes-I- und Stokes-V-Profile für die FeI Linie bei 6302,5 Å.

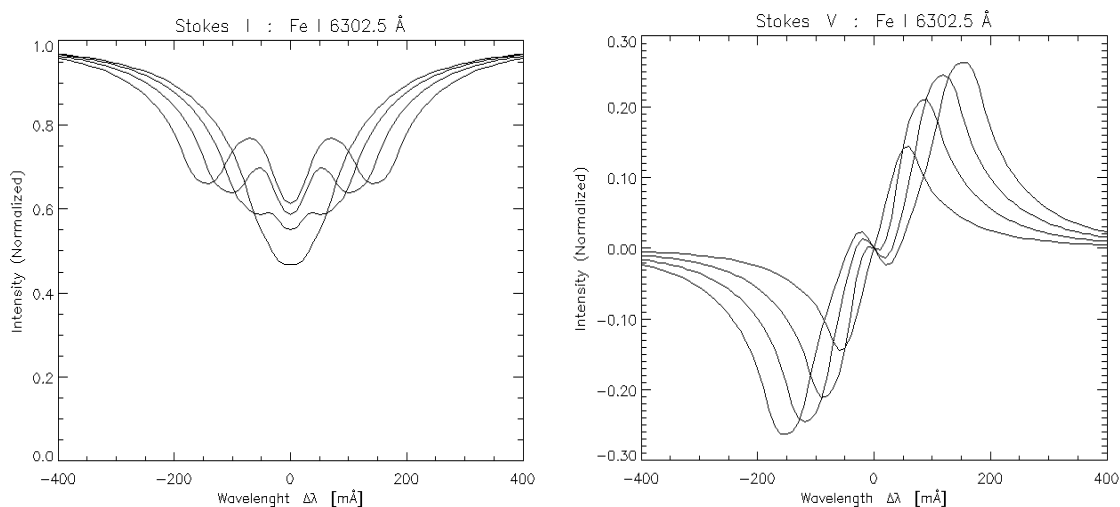


Abbildung 7.1 : Variation der Magnetfeldstärke von 800 G bis 2400 G in Schritten zu 800 G, bei sonst festen Parametern. Deutlich sichtbar wird die Aufspaltung der Stokes-I- und Stokes-V-Profile.

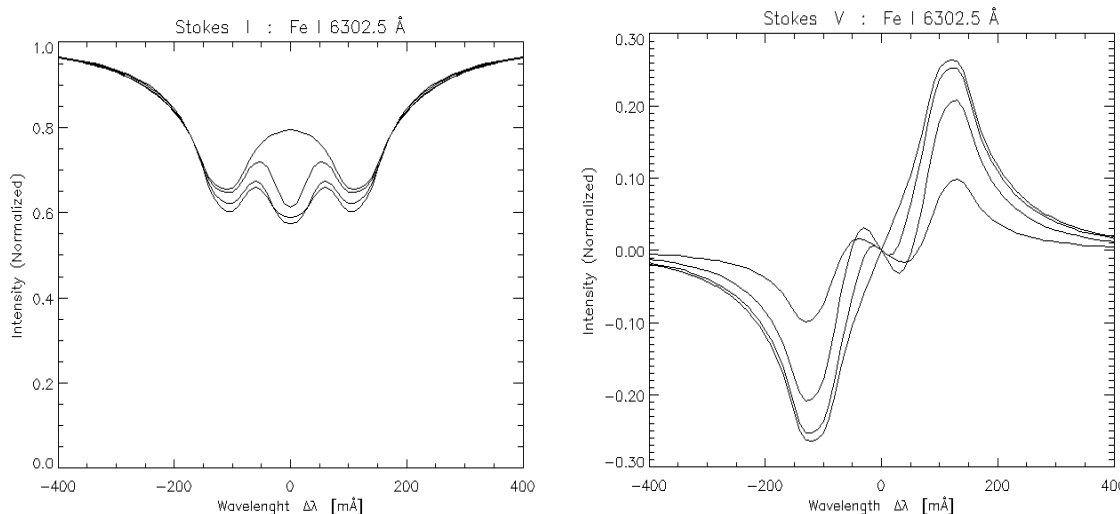


Abbildung 7.2 : Variation der Inklination (Winkel gegen die Sichtlinie) von 0° bis 60°, in Schritten zu 20°. Alle anderen Parameter sind wieder festgehalten. Deutlich zeigt sich beim Stokes-I-Profil das Herausbilden der  $\pi$ -Komponente. Beim Stokes-V-Profil zeigt sich deutlich die Änderung der Profilhöhe in Abhängigkeit vom Winkel.

Weiterhin trägt der in Kapitel 3 beschriebene magnetooptische Effekt über die Faraday-Voigt-Profilfunktion (3.52) sowie die Absorptionsmatrix (3.43) zu einem zusätzlichen Umverteilungsprozess der Polarisation bei und so zu der in Kapitel 3 beschriebenen Kopplung des Differentialgleichungssystems (3.54). Aufgrund dieser Kopplung und der Nichtlinearität des Gleichungssystems (3.54) sind die entstehenden Effekte kompliziert zu beschreiben. So sollen in diesem Zusammenhang nur die deutlichsten Effekte zur Auswahl der jeweiligen Parameter herangezogen werden.

Großräumigen Strömungsgeschwindigkeiten des photosphärischen Plasmas am Ort der Linienentstehung führen zu einer Rot- bzw. Blauverschiebung des gesamten Linienprofils. Für Geschwindigkeiten  $v_{plasma} \ll c$ , gilt für die Doppler-Verschiebung die einfache Beziehung (3.49)

$$\frac{v_{plasma}}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{v_0}.$$

Die Doppler-Verschiebung geht über die Gleichungen (3.51) und (3.52) in die Voigt- und Faraday-Voigt-Profilfunktionen ein und führt auch bei relativ kleinen Geschwindigkeiten zu deutlich messbaren Verschiebungen des Profils. Somit soll als zusätzlicher Parameter die Doppler-Geschwindigkeit ausgewählt werden.

Als weiterer Parameter soll die Mikroturbulenz bestimmt werden. Diese hinterlässt, wie aus Gleichung (3.25) ersichtlich,

$$\Delta v_D = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_T^2},$$

einen zusätzlichen Effekt zur thermischen Dopplerverbreiterung. Dieser ist statistisch bestimmt und entspricht somit ebenfalls einem Gaußprofil. Aufgrund der Voigt- und Faraday-Voigt-Profilfunktionen (3.51) und (3.52) sollte dieser Effekt weitgehend an den Profilspitzen auftreten, da der durch die Mikroturbulenz erzeugte Effekt dem rasch abfallenden Gaußprofil folgt, im Gegensatz zur Dämpfung, welche an den Profilflügeln bestimmend ist.

## 7.2 Auswahl geeigneter Absorptionslinien

Die Kriterien für die Auswahl geeigneter Absorptionslinien sind die messtechnische und synthetische Verfügbarkeit. In Hinblick auf die physikalischen Kriterien muss die zu untersuchende Absorptionslinie photosphärischen Ursprungs und magnetisch sensitiv sein. In dieser Hinsicht wäre ein ausreichendes Aufspaltungsverhalten unter dem Zeeman-Effekt zu fordern, um auch bei kleineren Magnetfeldstärken zumindest Verbreiterungen der Linie zu erreichen.

Weiterhin sollte die Linie einen normalen Zeeman-Effekt aufweisen, um nicht durch Mehrfachaufspaltung der Komponenten das effektive Aufspaltungsvermögen zu verkleinern. Die Aufspaltung wird wiederum durch den Term (3.46) deutlich :

$$v = \frac{B}{\Delta\lambda_D} \left( \frac{e \lambda_0^2}{4\pi m_e c^2} \right) g_J \Delta M_J.$$

Hierin ist die Aufspaltung proportional zum Quadrat der Wellenlänge der Linie und proportional zum Landé-Faktor des Überganges - für den normalen Zeeman-Effekt erscheint nur ein Landé-Faktor in Gleichung (3.46), da beide Zustände den gleichen Landé-Faktor haben bzw. einer von beiden keine Aufspaltung zeigt, so dass als Kriterium sowohl die Wellenlänge als auch der Landé-Faktor der Linie dienen.

Aufgrund der messtechnischen als auch der synthetischen Verfügbarkeit fiel die Wahl auf die beiden photosphärischen Absorptionslinien FeI bei 6302,5 Å und 5250,22 Å. Diese Linien sind aufgrund ihrer relativ großen Aufspaltung beliebte Beobachtungslinien, um photosphärische Magnetfelder zu bestimmen. Die wesentlichen Linienparameter sind in folgender Tabelle 7.1 aufgeführt.

Linie [Å]	Übergang	Anregung spot. $\chi$	$g_1$	$g_2$	L-S $g_{\text{eff}}$	Exp. $g_{\text{eff}}$
FeI 5250.22	$a^5D_0 - z^7D_1$	0,12 eV	-	3,0	3,0	2,999
FeI 6302.50	$z^5P_1 - e^5D_0$	3,69 eV	2,5	-	2,5	2,487

Tabelle 7.1 : Linienparameter für FeI 6302,5 Å und FeI 5250,22 Å

Die Tabelle zeigt neben der Wellenlänge der Linie die Bezeichnung des Übergangs, das Anregungspotential des unteren Niveaus, die Landé-Faktoren für das untere und obere Niveau sowie den effektiven Landé-Faktor in L-S-Kopplung und den empirisch berechneten Landé-Faktor. Der effektive Landé-Faktor ist definiert als :

$$g_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(g_l + g_u) + \frac{1}{4}(g_l - g_u)(J_l(J_l + 1) - J_u(J_u + 1)). \quad (7.2)$$

Die Einführung des effektiven Landé-Faktors ist aus messtechnischen Gründen eingeführt worden, um dem anomalen Zeeman-Effekt Rechnung zu tragen (Landi Degl'Innocenti 1982). Die Abweichungen zwischen dem effektiven Landé-Faktor und dem empirischen effektiven Landé-Faktor ist ein Maß für die Abweichung vom Mechanismus der Russell-Saunders-Kopplung (L-S-Kopplung).

### 7.3 Modellatmosphären

Die Variation der Temperatur  $T$  und des Drucks  $p$  mit der optischen Tiefe  $\tau$  wird oft als Modellatmosphäre bezeichnet (Stix 1989). Die Ableitung des Temperaturverlaufs sowie des Druckverlaufs werden durch unterschiedlichen Parameter aus der Beobachtung und der Theorie gewonnen. Die existierenden Modelle können grob in drei Klassen eingeteilt werden.

*Empirische Modelle* : Die physikalischen Parameter werden hier ausschließlich aus den Beobachtungsdaten gewonnen bzw. werden aus plausiblen Annahmen abgeleitet. Das HSRA Modell (Harvard Smithsonian Reference Atmosphere, Gingrich et al. 1971) ist ein Beispiel für eine Modellatmosphäre der ruhigen Sonne.

*Semiempirische Modelle* : Einige grundlegende Gleichungen müssen hierbei erfüllt werden, wie z.B. das hydrostatische Gleichgewicht. Der Temperaturverlauf wird dabei weiterhin an die Beobachtungsdaten angepasst. Als Beispiel dienen hierzu das Modell von Staude (1981) für die Umbra und Holweger und Müller (1974) für die ruhige Sonne.

*Theoretische Modelle* : Dabei wird das gesamte Modell auf den Grundlagen verschiedener Grundgleichungen aufgebaut, insbesondere den Gleichungen der Magnetohydrodynamik. Weiterhin werden hierbei physikalisch plausible Annahmen zu den Grenzbedingungen gemacht ohne diese vorher an Beobachtungsdaten anzupassen. Ein Beispiel für ein theoretisches Modell ist zu finden bei Pizzo (1976).

Aus den Gleichungen zum polarisierten Strahlungstransport wird unmittelbar ersichtlich, dass die Temperatur an vielen Stellen der Gleichungen ihren Einfluss hat und so von wesentlicher Bedeutung für die Stokes-Linienprofile ist. Ein Blick auf die Strahlungstransportgleichung (3.59) :

$$I(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_0} O(\tau, \tau') K(\tau') S(\tau') d\tau' + O(\tau, \tau_0) I(\tau_0) ,$$

verdeutlicht, dass die Temperatur in allen Komponenten  $O$ ,  $K$ ,  $S$  und  $I$  vertreten ist, und so auf vielfältige Weise zum Entstehen der Stokes-Profile beiträgt. Insbesondere sei hier auf den Einfluss der Temperatur auf den Linienabsorptionskoeffizienten, Gleichung (3.36)

$$\kappa_l = \frac{\pi e^2}{m_e c} N_l f_{l2} \left[ 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right] ,$$

sowie auf die Linienquellfunktion (3.35)

$$S_l = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

hingewiesen. Weiterhin findet die Temperatur über die Dopplerverbreiterung (3.25),

$$\Delta v_D = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_T^2},$$

Eingang in die Profildfunktionen (3.51 und 3.52). Die nachfolgende Abbildung 7.3 zeigt den Temperaturverlauf von zwei semiempirischen Umbramodellatmosphären. Von Maltby et. al. (1986), im folgenden mit MK bezeichnet, und von Kollatschny et. al. (1980), im folgenden mit M4 bezeichnet.

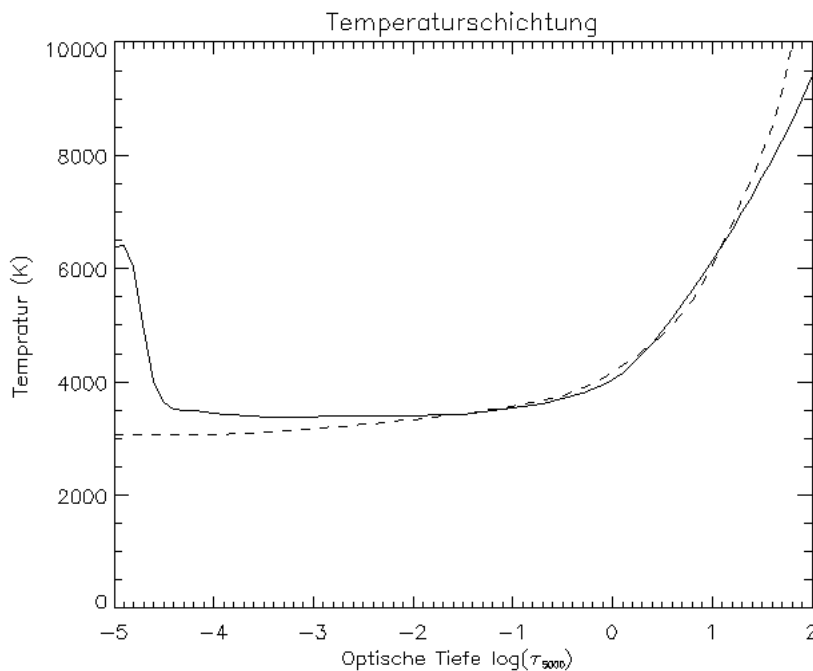


Abbildung 7.3 : Temperaturverlauf der Umbramodelle MK (durchgezogene Linie) und M4 (gestrichelte Linie).

Für diese beiden Modellatmosphären wurden Stokes-I- und Stokes-V-Profile synthetisch berechnet, Abbildung 7.4 . Dabei wurde die FeI Linie 5250,22 Å ausgesucht, die aufgrund ihres niedrigeren Anregungspotential von 0,12 eV empfindlicher in Bezug auf die Temperatur ist. Wie vorher auch wurden dabei alle Atmosphärenparameter festgehalten und nur der für die Betrachtung relevante Verlauf der Temperatur und des Druckes, wurden gemäß der Modellatmosphären geändert.

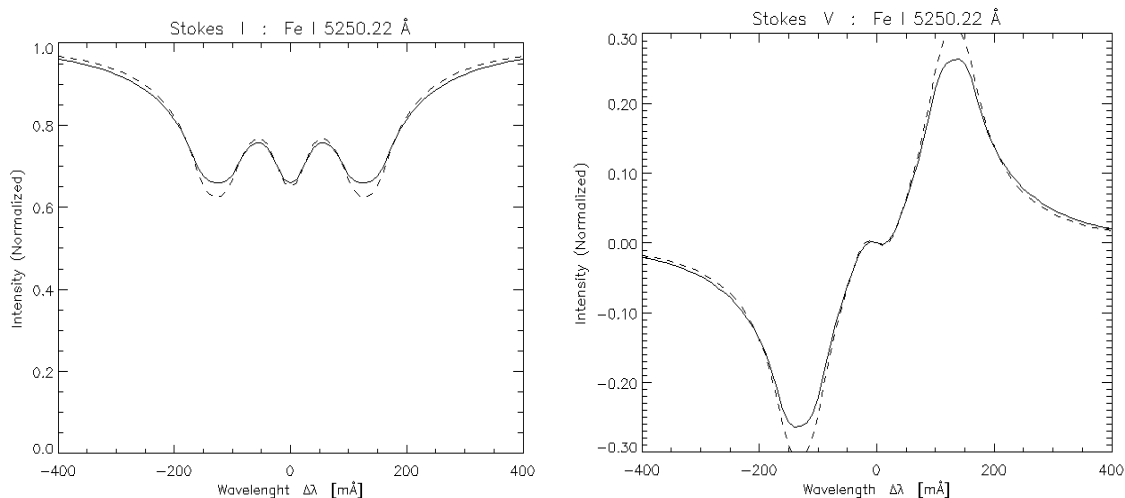


Abbildung 7.4 : Stokes-I und Stokes-V der FeI Linie bei 5250,22 Å, berechnet mit dem Modell MK (durchgezogene Linie) und Modell M4 (gestrichelte Linie).

Deutlich sichtbar wird dabei der Unterschied, den die beiden Umbramodelle in den Stokes-Linienprofilen hinterlassen.

Aufgrund des deutlichen Zusammenhangs zwischen Temperaturverlauf und den Stokes-Parametern, sollte bei der Inversion mit Hilfe von künstlichen neuronalen Netzen der Versuch unternommen werden, aus den Stokes-Profilen Informationen über die Modellatmosphären zu erhalten. In Kapitel 8 wird beschrieben, wie künstliche neuronale Netze dazu benutzt werden, eine Klassifikation der Modellatmosphären anhand von Stokes-Linienprofilen durchzuführen.

## 7.4 Synthetische Stokes-Linienprofile

Die Erzeugung von synthetischen Stokes-Linienprofilen ist für diese Arbeit von besonderer Bedeutung, da zum einen das Training der künstlichen neuronalen Netze als auch die Tests und Beurteilung der Netze auf der Basis von synthetischen Profilen durchgeführt werden. Das in dieser Arbeit benutzte Programm zur Erzeugung der synthetischen Stokes-Linienprofile ist das Strahlungstransportprogramm DIAMAG des Kiepenheuer-Instituts für Sonnenphysik (Grossmann-Doerth 1994).

Für die nachfolgende Inversion auf der Basis von Response-Funktionen wird das Programm DIAMAG erweitert durch die in Kapitel 5 beschriebenen und berechneten Response-Funktionen. Das erweiterte Strahlungstransportprogramm wird anschließend in den Levenberg-Marquardt Algorithmus (Kapitel 4) eingebettet, um so das vollständige Inversionsprogramm zu implementieren.

Das Programm DIAMAG berechnet alle vier Stokes-Parameter I,Q,U,V einer bestimmten Spektrallinie entlang einer gewählten Sichtlinie. Als Eingabe in das Programm zählen zum einen die Linienparameter des betrachteten Elements und dessen Übergang (Quantenzahlen L,S,J, Ordnungszahl, Anregungspotential u.s.w), zum anderen die Modellatmosphäre, d.h. die Schichtung der Temperatur und des Druckes, sowie zahlreiche andere Parameter wie z.B.

Elektronendichte, Wasserstoffdichte der verschiedenen Arten, Ionisationsgrad, Van der Waals-Dämpfung u.s.w.. Als variable Eingangsgrößen stehen folgende atmosphärische Parameter zur Verfügung: Die Schichtung für die Magnetfeldstärke, die Auslenkung des Magnetfeldvektors gegen die Sichtlinie (Inklination), der Azimuth des Magnetfeldvektors, die Doppler-Geschwindigkeit des Plasmas und die Mikroturbulenz. Die Schichtung all dieser Parameter geschieht dabei in Richtung der Sichtlinie in einem Intervall von  $\log \tau_{5000} = 2$  bis  $\log \tau_{5000} = -5$ , wobei  $\tau_{5000}$  der optischen Tiefe bei 5000 Å entspricht.

Das Programm bietet die Möglichkeit, NLTE Effekte zu berücksichtigen. Aufgrund dessen, dass in dieser Arbeit ausschließlich photosphärische Linien unter LTE-Bedingungen betrachtet werden, wird von dieser Option kein Gebrauch gemacht. Die Berechnung der Stokes-Parameter geschieht dann gemäss der in Kapitel 3 aufgeführten Gleichungen für den polarisierten Strahlungstransport. Das Programm DIAMAG benutzt zum Lösen der gekoppelten Differentialgleichung (3.55) die von Rees, Murphy und Durrant (1989) beschriebene, sogenannte DELO-Methode. Dabei wird das Differentialgleichungssystem (3.55) in eine Integralgleichung überführt und anschließend linearisiert. Diese Methode bietet nicht nur eine schnelle und genaue Methode der numerischen Berechnung der Stokes-Parameter, sondern auch eine Möglichkeit, den zur Berechnung der Response-Funktionen benötigte Evolutions-Operator (3.61) durch eine kleine Modifikation numerisch zu berechnen (siehe Anhang).

## 8 Die Inversion mit künstlichen neuronalen Netzen

Aufgrund dessen dass es keine allgemeine analytische Lösung des inversen Problems für den polarisierten Strahlungstransport gibt liegt der übliche Ansatz zur Interpretation und Analyse von Stokes-Linienprofilen in der Anpassung des theoretischen Modells des Strahlungstransports (Vorwärtsmodell) an die beobachteten Daten. Der große Rechenaufwand dieser Methodik ist einer der Hauptfaktoren, warum die Inversion bisher nicht in großem Umfang angewandt wird. So ist die Bearbeitung und Analyse von mehreren hundert oder gar tausend Stokes-Profilen nur unter beträchtlichen Zeitaufwand möglich. Hier bieten künstliche neuronale Netze einen alternativen Ansatz zur herkömmlichen Inversion von Stokes-Profilen. Die in Kapitel 6 beschriebenen Fähigkeiten künstlicher neuronaler Netze sollen genutzt werden, um eine Approximation des zugrundeliegenden inversen Modells zu finden. Bei einer erfolgreichen Adaption des neuronalen Netzes, können so eine große Zahl von Stokes-Profilen innerhalb sehr kurzer Zeit analysiert werden.

In diesem Kapitel wird zuerst die Konzeption und Vorgehensweise bei der Inversion mit künstlichen neuronalen Netzen beschrieben. Anschließend wird der Erstellungs- und der Trainingsprozess für die jeweiligen Netzwerke beschrieben. Danach wird das Aussageverhalten sowie die Berechnungsgenauigkeit der trainierten neuronalen Netze untersucht und eine Bewertung der erzielten Ergebnisse gegeben.

### 8.1 Konzeption des Analyseverfahren

Die Temperatur ist der Faktor mit dem größten Einfluss bei der Entstehung der Absorptionsprofile. Wie in Kapitel 7 beschrieben, ist der Einfluss der Temperatur durch die Strahlungstransportgleichung an vielen Stellen des Stokes-Profiles ersichtlich. Die Untersuchungen von Ruiz Cobo und del Toro Iniesta (1994, 1996) zeigen sehr eindrucksvoll, dass die Response-Funktionen der Temperatur um mindestens eine Größenordnung größer sind als die Response-Funktionen der anderen atmosphärischen Parameter. Das bedeutet, dass die Stokes-Parameter sehr sensibel auf kleinste Änderungen in der Temperatur reagieren und den größten Beitrag zur Veränderung des Spektrums liefern. Ruiz Cobo und del Toro Iniesta (1996) konnten weiter zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen, Veränderungen für Temperatur und Magnetfeldstärke zu gleichen beobachtbaren Resultaten führen. Dies kann analytisch durch Gleichung (5.8) verdeutlicht werden

$$\delta I(0) = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} R_i(\tau) \delta x_i(\tau) d\tau.$$



Dabei läuft der Index  $i$  über die verschiedenen zu untersuchenden Parameter. Jeder der  $m$  Parameter trägt mit einem durch die jeweilige Response-Funktion  $R_i(\tau)$  gegebenen Beitrag zur Variation des Stokes-Vektors  $\delta I$  bei. Bei dem inversen Problem besteht nun die Aufgabe, die jeweiligen Beiträge zu unterscheiden und die Parameter  $x_i$  zu bestimmen. Ausgedrückt durch die Response-Funktionen entspricht Gleichung (5.8) einer Fredholmschen Integralgleichung erster Art für die Parameter  $\delta x_i$ . Gerade diese Art von Integralgleichungen sind besonders oft schlecht gestellt und schlecht konditioniert (Jeffrey und Rosner 1986). Somit hängt das inverse Problem unter Umständen nicht eindeutig und nicht stetig von dem Stokes-Profil ab. Konkret bedeutet das, dass ein zu untersuchendes Profil unter Umständen nicht eindeutig den atmosphärischen Parametern zugeordnet werden kann also mehrere Lösungen besitzt. Dieses Problem wird bei realen Beobachtungen durch Rauschen weiter verstärkt. Die schlechte Kondition des Problems äußert sich derart dass kleine Veränderungen des originalen (wahren) Profils, durch Rauschen, zu drastischen Änderungen in den zugrundeliegenden Parametern führen können. Wie in Kapitel 6 dargelegt, sind die in dieser Arbeit benutzten Multi-Layer-Perceptronen universelle Approximatoren für den Fall, dass die den Daten zugrundeliegenden Abhängigkeiten einer stetigen funktionalen Abbildung entsprechen. Somit besteht die Gefahr das, dass zugrundeliegende „inverse Modell“ durch ein neuronales Netz nicht zu approximieren ist.

Diese Problematik lässt sich angehen durch einen probabilistischen Ansatz. Wie in Kapitel 6 beschrieben können Multi-Layer-Perceptronen dazu benutzt werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten, bezüglich einer vorher zu bestimmenden Klasseneinteilung, zu approximieren. Aus der Dominanz des Temperaturverhaltens bei der Entstehung der Stokes-Profile soll in der nachfolgenden Inversion mit künstlichen neuronalen Netzen zunächst - unter Berücksichtigung aller anderen Parameter - eine Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung, bezüglich verschiedener semiempirischer Modellatmosphären (Temperatur- und Druckverlauf), durch ein Klassifikationsnetzwerk durchgeführt werden. Dadurch soll der Parameterraum in verschiedene Bereiche bzw. Klassen - entsprechend den Modellatmosphären - eingeteilt werden, um somit eine Wahrscheinlichkeitsaussage über das zugrundeliegende Temperaturmodell zu gestatten.

Zunächst soll anhand der Stokes-Parameter das Temperaturmodell der Umbra bestimmt werden. Dazu wird in dieser Arbeit auf der Grundlage von acht semiempirischen Modellatmosphären ein neuronales Netz (Klassifikationsnetzwerk) trainiert werden, um so eine möglichst genaue Klassifikation bzw. Bestimmung des Temperaturmodells zu erreichen. Um den Erstellungs- und Trainingsumfang in dieser Arbeit zu begrenzen, findet eine Beschränkung auf acht Modellatmosphären statt. Prinzipiell bestehen aber keine Einschränkungen bezüglich der Anzahl der zu klassifizierenden Atmosphärenmodelle.

In Abhängigkeit vom Ergebnis des Klassifikationsnetzwerkes, wird im Anschluss daran eines von acht neuronalen Netzen (Parameternetzwerk) für die Approximation der atmosphärischen Parameter bestimmt. Die Auswahl des Parameternetzwerkes wird durch die höchste Wahrscheinlichkeitsaussage des Klassifikationsnetzwerk bestimmt. Bei bestehenden inhärenten Mehrdeutigkeiten des inversen Problems, werden mehrere Wahrscheinlichkeiten (Ausgaben) des Klassifikationsnetzwerkes signifikante Werte annehmen. So müssen dann

mehrere Parameternetzwerke ausgewählt werden und die erzielten Ergebnisse probalistisch gewertet werden.

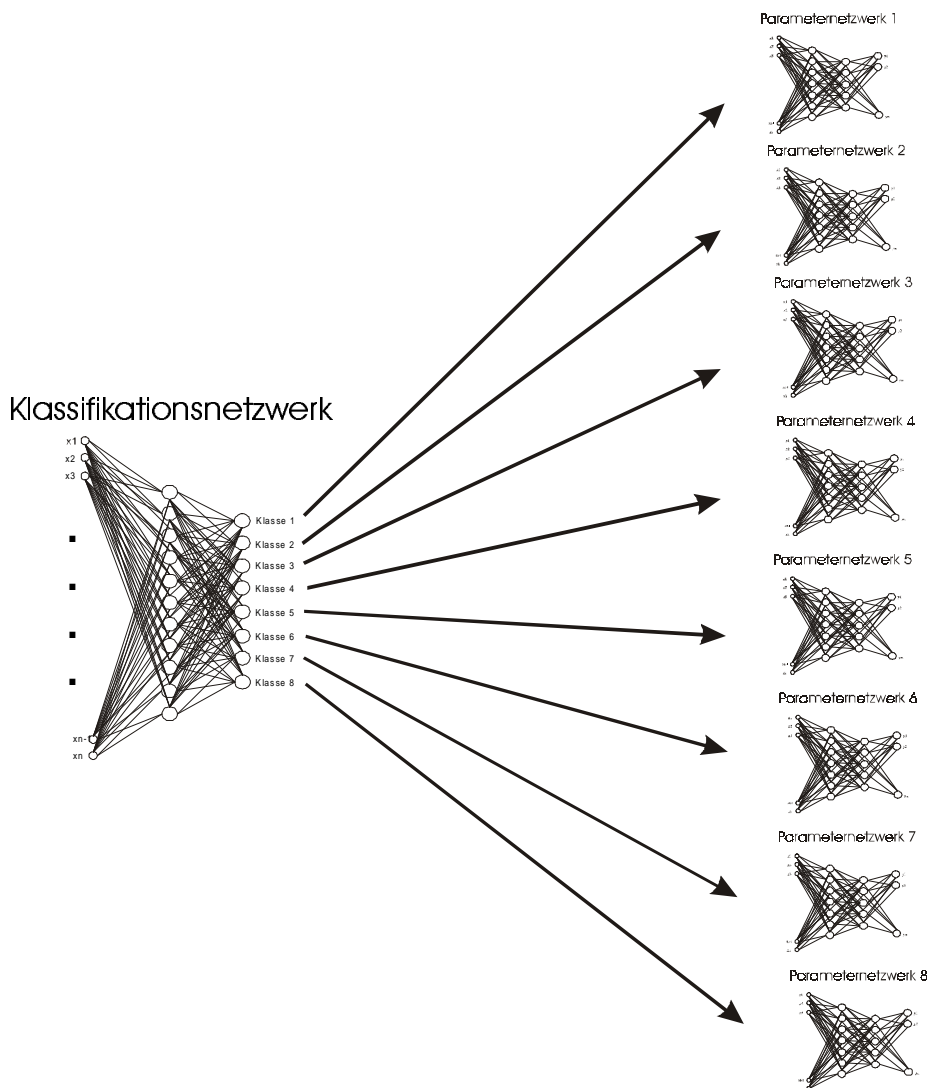


Abbildung 8.1 : Entkopplung der Temperaturbestimmung und der Bestimmung der atmosphärischen Parameter. In Abhängigkeit von der Temperaturmodellbestimmung durch das Klassifikationsnetz wird eines der folgenden acht Parameternetze für die Berechnung der atmosphärischen Parameter bestimmt.

Die jeweiligen Parameternetzwerke sind dabei auf der Basis von jeweils einem der acht Temperaturmodelle trainiert worden. Das bedeutet, die synthetischen Profile für das Training der Parameternetzwerke wurden jeweils unter einem der acht Modellatmosphären erzeugt. So ist gewährleistet, das dasjenige Parameternetzwerk ausgewählt wird, dessen zugrundeliegendes Temperaturmodell am besten bzw. am wahrscheinlichsten mit dem tatsächlichen übereinstimmt. In der Abbildung 8.1 ist das Schema der Inversion mit künstlichen neuronalen Netzen verdeutlicht.

## 8.2 Der Stuttgarter neuronale Netze-Simulator SNNS

Für die Erstellung, das Training und das Testen der neuronalen Netze wird der Stuttgarter neuronale Netze-Simulator SNNS benutzt. Dieser Softwaresimulator für künstliche neuronale Netze wurde vom Institut für Parallele und Verteilte Hochleistungssysteme der Universität Stuttgart entwickelt (Zell 1994). Die Entwicklungsumgebung SNNS ermöglicht das einfache Erstellen von verschiedenen Netzwerktypen und Netzwerktopologien. Netzwerktopologie bezieht sich dabei auf die Bestimmung der Anzahl verdeckter Schichten und die Anzahl der Elemente (Neuronen) innerhalb der jeweiligen Schichten sowie auf die Art der Aktivierungsfunktion. In dieser Arbeit wird ausschließlich der Typ des Multi-Layer-Perceptron benutzt, mit der Sigmoidfunktion als Aktivierungsfunktion. Diese besitzen, wie bereits beschrieben, die geeigneten Fähigkeiten für die Klassifikation als auch für die Approximation bzw. der Parameterisierung.

Der Trainingsprozess in der Entwicklungsumgebung SNNS gestaltet sich wie folgt: Nach der Erstellung des Netztyps und der Netzwerktopologie wird die Datei mit den Trainingseingabevektoren und den dazugehörigen Trainingsausgabevektoren geladen. Im Anschluss daran werden der Trainingsalgorithmus bestimmt und die zugehörigen Trainingsparameter des Algorithmus eingestellt. Der Trainingsprozess kann durch verschiedenen Analysefunktionen verfolgt und beurteilt werden. Zum Abschluss bieten sogenannte Pruning-Algorithmen die Möglichkeit, neuronale Netze auf inaktive Elemente oder Verbindungen hin zu untersuchen, um somit die Netzwerktopologie zu verkleinern und damit die Generalisierungseigenschaften des Netzes zu verbessern (Kapitel 6.6). Der langwierige experimentelle Trainings- und Analyseablauf kann durch die Programmereigenschaften von SNNS, weitgehend automatisiert werden. Dies ermöglicht es, auch über längere Zeiträume unüberwacht Tests verschiedener Netzwerktopologien und Trainingsstrategien durchzuführen. Das erstellte, trainierte und optimierte neuronale Netzwerk kann zum Abschluss in ein C-Programm übersetzt werden und somit in eine übergeordnete Anwendung integriert werden. Folgende Abbildung 8.2 zeigt die Benutzeroberfläche von SNNS, mit einigen Analysefunktionen.

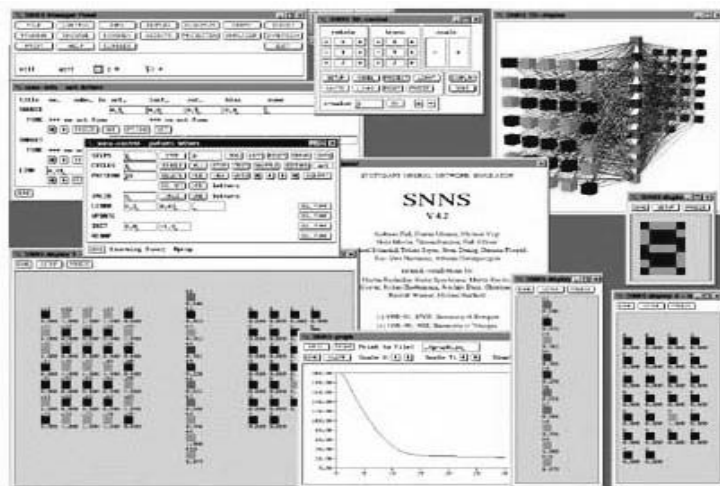


Abbildung 8.2 : Benutzeroberfläche der Entwicklungsumgebung SNNS

### 8.3 Klassifikation der Modellatmosphäre mit neuronalen Netzen

In diesem Abschnitt soll ein künstliches neuronales Netz entwickelt werden, auf dessen Grundlage es möglich sein soll, aus den Stokes-Profilen das Atmosphärenmodell der Umbra, d.h. den Temperaturverlauf in Abhängigkeit von der optischen Tiefe  $T(\tau)$  zu bestimmen. Dazu soll das neuronale Netz mit acht verschiedenen semiempirischen Modellatmosphären trainiert werden. Das heißt, es werden zahlreiche synthetische Stokes-Profile auf der Basis von acht verschiedenen Modellatmosphären erzeugt. Diese bilden dann die Grundlage für die Trainingsmenge des Klassifikationsnetzwerks. Im Anwendungsmodus soll das trainierte neuronale Netz in der Lage sein, für unbekannte Stokes-Profile Wahrscheinlichkeitsaussagen zu generieren, die den Grad der Zugehörigkeit zu einem der acht semiempirischen Modellatmosphären angeben. Dabei ist also die Frage zu klären, ob genug Information in den Stokes-Profilen enthalten ist, um damit eine Unterscheidung bezüglich des Temperaturmodells durchzuführen. Die folgende Abbildung stellt das Schema der Klassifikation dar.

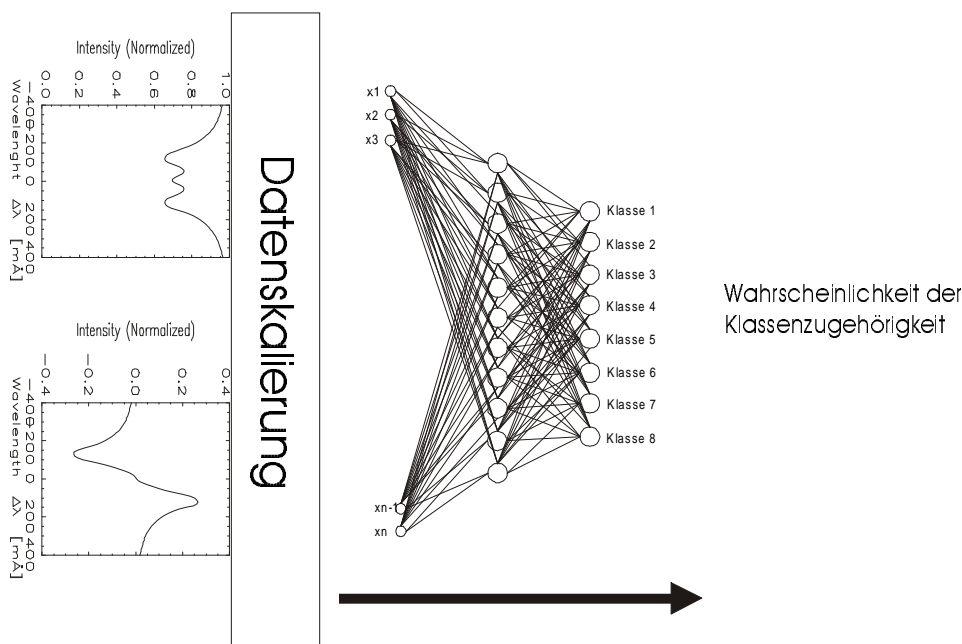


Abbildung 8.3 : Schematischer Verlauf der Berechnung, die Stokes-I- und Stokes-V-Profile werden zuerst mit der in Kapitel 8.3.2 beschriebenen Methode skaliert und anschließend dem neuronalen Netz präsentiert. Die gewonnenen Ergebnisse geben die Wahrscheinlichkeit an, mit der die jeweiligen Eingangsprofile zu einer der trainierten Modellatmosphären (Klassen) gehören.

In diesem Abschnitt werden zunächst die Erzeugung der Trainingsdaten, sowie die Aufbereitung und Skalierung der Trainingsdaten beschrieben. Anschließend wird der Trainingsprozess beschrieben, und am Ende dieses Kapitels findet eine Bewertung der Berechnungsgenauigkeit des Klassifikationsnetzwerkes statt.

### 8.3.1 Auswahl und Erzeugung der Trainingsdaten

Als Absorptionslinie wird die in Kapitel 7 vorgestellte Fe I Linie bei  $5250.22 \text{ \AA}$  ausgewählt. Diese Linie ist aufgrund des niedrigen Anregungspotential von  $0,12 \text{ eV}$  sehr empfindlich gegenüber der Temperatur und sollte, wie in Kapitel 7 beschrieben, den vielfältigen Einfluss der Temperatur innerhalb der Stokes-Profilen gut widerspiegeln.

Als Eingangsvektor soll das diskrete Stokes-I- und Stokes-V-Profil dienen. Auf die Information der Stokes-Q- und Stokes-U-Profilen soll dabei verzichtet werden. Diese tragen einerseits bezüglich der Temperatur keine Mehrinformation gegenüber den Stokes-I- und Stokes-V-Profilen. Andererseits sind messtechnische Gründe ausschlaggebend so hängen die Stokes-Q- und Stokes-U-Profilen in zweiter Ordnung von der Transversalkomponente des Magnetfeldes ab, das insbesondere bei kleinen Magnetfeldstärken die Stokes-Q- und Stokes-U-Signale starker beeinflusst. Weiterhin sind die Stokes-Q- und Stokes-U-Komponenten störanfälliger in Bezug auf eventuelle instrumentelle Polarisation.

Die Stokes-I- und Stokes-V-Profilen werden in einem Bereich von  $\pm 400 \text{ m\AA}$  um das Linienzentrum in diskreten Werten mit einem gleichmässigen Abstand von  $10 \text{ m\AA}$  dargestellt. Das bedeutet für das Stokes-I- und das Stokes-V-Profil, dass jeweils 81 Datenpunkte benutzt werden. Damit ist gleichzeitig die Anzahl der Eingangsneuronen (Elemente) bzw. die Dimension des Eingangsvektors des neuronalen Netzes auf 162 festgelegt. Die Intensität der jeweiligen Stokes-Profilen ist mit der Kontinuumsintensität bei  $5000 \text{ \AA}$  normiert.

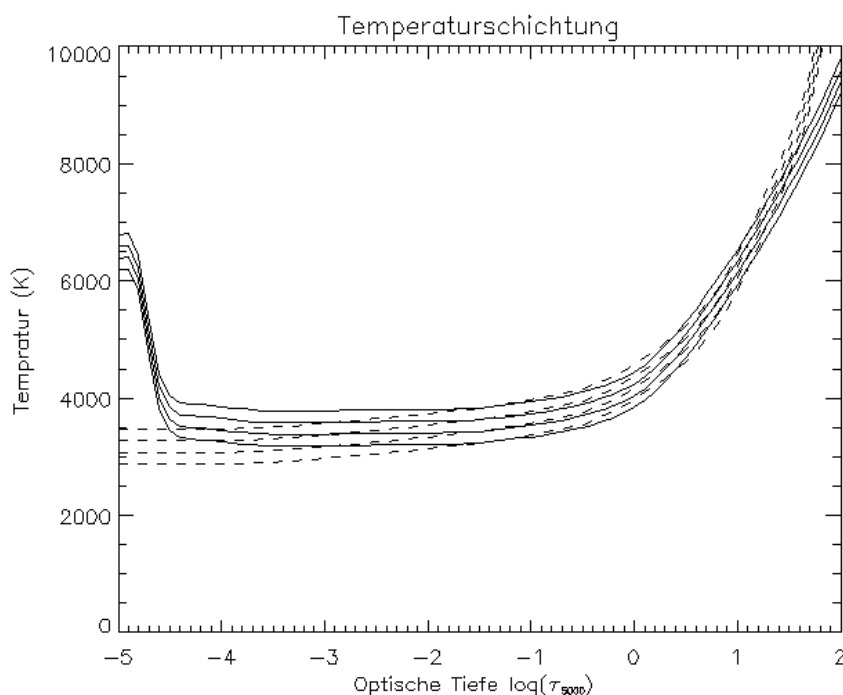


Abbildung 8.4 : Verlauf der Temperaturschichtung für die Modellatmosphären MK, MK-200, MK+200, MK+400 durchgezogene Linien und der Modelle M4, M4-200, M4+200, M4+400 gestrichelte Linien.

Ausgehend von den in Kapitel 7 vorgestellten Modellatmosphären MK von Maltby et. al. (1986) und M4 von Kollatschny et. al. (1980) wurden zu jedem Modell weitere vier modifizierte Modellatmosphären im hydrostatischen Gleichgewicht berechnet. Zu den beiden Temperaturverläufen von MK und M4 wurden jeweils +200 K, -200 K sowie + 400 K gleichmäßig über den gesamten Verlauf hinzuaddiert. Aus diesen neuen Temperaturverläufen - im folgenden als MK-200, MK+200, MK+400, M4-200, M4+200, M4+400 bezeichnet - wurden dann die jeweiligen neuen Druckschichtungen im hydrostatischen Gleichgewicht berechnet. Der Temperatur und Druckverlauf erstreckt sich jeweils in einem Bereich der optischen Tiefe von  $\log(\tau) = 2$  bis  $\log(\tau) = -5$ . Abbildung 8.4 zeigt den Temperaturverlauf der acht Modellatmosphären.

Die Erstellung der synthetischen Profile wurde mit dem bereits beschriebenen Strahlungstransportprogramm DIAMAG durchgeführt. Die synthetischen Profile stellen, wie bereits beschrieben, die Grundlage dar, auf deren Basis die künstlichen neuronalen Netze das funktionale Verhalten erkennen sollen. Um den Eingaberaum der Trainingsmenge möglichst weiträumig und gleichmäßig abzudecken, wurden alle anderen Parameter wie Magnetfeldstärke, Inklination, Azimut, Doppler-Geschwindigkeit und Mikroturbulenz, bei der Erzeugung der synthetischen Profile mit variiert. Obwohl zu diesem Zeitpunkt nicht verfolgt wird, die atmosphärischen Parameter zu bestimmen, muss deren Einfluss dem neuronalen Netz sehr wohl aufgezeigt werden, um die wesentlichen, von der Temperatur bedingten Einflüsse von den anderen zu unterscheiden und so die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich der Temperatur möglichst genau zu approximieren. Die Variation der atmosphärischen Parameter erfolgt dabei per Zufallsgenerator innerhalb der folgenden Bereiche :

- *Modellatmosphäre* : MK, MK-200, MK+200, MK+400, M4, M4-200, M4+200, M4+400
- *Magnetfeldstärke* : 400 G bis 3800 G
- *Inklination* : 0° bis 90°
- *Doppler-Geschwindigkeit* : -2000 m/s bis +2000 m/s
- *Mikroturbulenz* : 0 m/s bis 1400 m/s

Aufgrund der Tatsache, dass nur Stokes-I- und Stokes-V-Profile für die Klassifikation benutzt wurden, ist der Einfluss des Azimut, der seine Wirkung nur indirekt durch den magnetooptischen Effekt mit einbringt, vernachlässigt worden.

Per Zufallsgenerator wurden so beliebige Kombinationen der verschiedenen Modellatmosphären sowie der Parameter aus den oben angegebenen Bereichen ausgewählt und damit synthetische Stokes-I und Stokes-V Profile erzeugt. Der Zufallsgenerator arbeitet auf der Basis einer Gleichverteilung. Daher werden die Bereichsintervalle für jeden Parameter gleichmäßig durch den Zufallsgenerator abgedeckt. Insgesamt wurden so drei Mengen mit je 3100 synthetischen Stokes-I- und Stokes-V-Profile erzeugt. Zu den drei Mengen gehören die Trainingsdatenmenge für den eigentlichen Trainingsvorgang der neuronalen Netze, die Validierungsdatenmenge für die Überprüfung der Generalisierungseigenschaften während des Trainingsvorgangs und die Testdatenmenge für die Beurteilung der Aussagegüte des

trainierten neuronalen Netzes. Auf diese drei Datenmengen wird in 8.3.3 noch näher eingegangen. Zu jedem Eingangsvektor, bestehend aus den diskreten Stokes-I und Stokes-V Profilverläufen, gehört ein Ausgangsvektor, der die Zugehörigkeit zu der jeweiligen Modellatmosphäre, unter der die Stokes-Profile des Eingangsvektors erzeugt wurden, angibt. Die große Zahl von 3100 Trainingsdatenpaaren an synthetischen Profilen wurde deshalb gewählt, weil aufgrund der hohen Zahl von 162 Eingangsneuronen (Elemente) mit einer großen Zahl an Netzwerkparametern (gewichteten Verbindungen) bzw. Freiheitsgraden zu rechnen ist. Um gute Generalisierungseigenschaft (Kapitel 6.6) des neuronalen Netzes zu gewährleisten, sollten mehr Trainingsdatenpaare vorhanden sein als Freiheitsgrade im Netzwerk.

### 8.3.2 Datenaufbereitung

Eine geeignete Datenaufbereitung der Eingangs- und Ausgangsdaten des neuronalen Netzes kann von entscheidender Bedeutung für die Adaptionfähigkeit des Netzwerkes sein. Unter Umständen kann eine unterschiedliche Gewichtung der Eingangsdaten notwendig sein, wenn einzelne Elemente des Eingangsvektors größeren bzw. einen schwächeren Einfluss auf den funktionale Charakter haben.

Prinzipiell kann der Definitionsbereich der einzelnen Elemente des Eingangsvektors in das neuronale Netz den Bereich von  $[-\infty, +\infty]$  überstreichen, da zum einen die Aktivierungsfunktionen der einzelnen Neuronen denselben Definitionsbereich besitzen und zum anderen, die meisten künstlichen neuronalen Netze ohnehin in den Neuronen der Eingangsschicht keine Aktivierungsfunktion besitzen. Trotzdem wird aufgrund von Sättigungseffekten während des Trainingsvorgangs empfohlen, die Werte der einzelnen Elemente des Eingangsvektors in einen Bereich mit relativ kleiner Streuung um den Wert 0 zu skalieren. Sättigungseffekte können aufgrund des Funktionsverlaufs (Abbildung 6.1) der Sigmoidfunktion (6.1) auftreten. Der Definitionsbereich ist zwar von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , der Abbildungsbereich hingegen im offenen Intervall von 0 bis 1. Große negative sowie große positive Werte bringen die Funktion in Bereiche nahe 0 bzw. 1, mit sehr flachen Funktionsverlauf. Dies kann im Zusammenhang mit dem in 6.4 beschriebenen Gradientenabstiegsverfahren des Backpropagation-Lernalgorithmus dazu führen, dass die entsprechende partielle Ableitung der Aktivierung eines Neurons sehr klein wird und alle davor liegenden gewichteten Verbindungen kaum oder gar nicht mehr am Lernverfahren teilnehmen.

Aufgrund dessen, dass Stokes-Profildaten normiert sind, also in einem Bereich zwischen 0 bis 1 vorliegen, könnten diese direkt als Eingabevektor in das neuronale Netzen genutzt werden. Da jedoch unter Umständen auch sehr kleine Effekte in bestimmten Wellenlängenbereichen eine charakteristische Wirkung eines Parameters widerspiegeln, soll eine Skalierung vorgenommen werden, die die einzelnen Wellenlängenpunkte der jeweiligen Stokes-Profile miteinander in Verbindung bringt. Die Skalierung eines Profilwertes  $I$  in den skalierten Wert  $X$  wird nach folgender Gleichung vorgenommen

$$X_{\lambda k} = \frac{I_{\lambda k} - \bar{I}_{\lambda}}{\sigma_{\lambda}}, \text{ wobei } k = 1, \dots, N \text{ und } \lambda = 1, \dots, M. \quad (8.4)$$

Der Index  $k$  verläuft dabei über die Anzahl  $N$  der Trainingsdatenpaare und der Index  $\lambda$  verläuft über die Anzahl  $M$  der diskreten Wellenlängenpunkte. Der Mittelwert des Profilwertes  $I$  für einen diskreten Wellenlängenpunkt  $\lambda$  wird gebildet über alle in der Datenmenge enthaltenen Eingangsprofile (Eingangsvektoren) und ist gegeben durch

$$\bar{I}_{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^N I_{\lambda k}}{N}. \quad (8.5)$$

Die Standardabweichung  $\sigma$  für einen bestimmten Wellenlängenpunkt  $\lambda$  des Eingangsprofils wird gebildet über alle Eingangsvektoren der Trainingsdatenmenge und ist gegeben durch

$$\sigma_{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^N (I_{\lambda k} - \bar{I}_{\lambda})^2}{N - 1}. \quad (8.6)$$

Auf diese Weise bekommen die skalierten Werte jedes diskreten Wellenlängenpunktes eine Standardabweichung von 1 und liegen somit eng um den Wert 0 verteilt. Weiterhin werden so die diskreten Wellenlängenpunkte der einzelnen Eingabevektoren mit jedem anderen aus der Trainingsdatenmenge in Beziehung gesetzt. Damit wird eine bessere relative Gewichtung in das Eingangsprofil kodiert. Konkret bedeutet das, wenn vorher aufgrund der Änderung eines oder mehrerer atmosphärischer Parameter nur eine kleine spezifische Änderungen in einem bestimmten Wellenlängenbereich des Eingangsprofils zu beobachten war, wird diese Änderung aufgrund der angegebenen Skalierung aufgeweitet und erhält somit ein stärkeres Gewicht gegenüber anderen parameterbedingten Änderungen des Stokes-Profiles. So wird selbst bei betragsmäßig kleinen Einflüssen, wie sie in den Flügeln der Stokes-I und Stokes-V normalerweise zu beobachten sind, im Gegensatz zu den ausgeprägten Änderungen in der Linienmitte eine gleichmäßige Gewichtung erzeugt.

Die Skalierung der Validierungs- und Testdatenmengen geschieht in der gleichen Weise wie oben beschrieben. Dabei ist aber zu beachten, dass die Durchschnittswerte und die Standardabweichungen der Testdatenmenge zugrundegelegt werden. Die Skalierung der dem Netz unbekanntem Validierungs- und Testdatenmengen muss auf der Grundlage der bekannten Trainingsdatenmenge erfolgen. Somit wird sichergestellt, dass die richtige Einordnung in die jeweiligen Intervalle der diskreten skalierten Wellenlängenpunkte erfolgt. Für die Ausgabevektoren ist im Falle eines Klassifikationsnetzwerkes keine Datenaufbereitung notwendig. Je nachdem, zu welcher Klasse der Trainingseingangsvektor gehört, d.h. unter welcher Modellatmosphäre die Stokes-Profile des Eingangsvektors erzeugt wurden, wird dasjenige Element des Ausgangsvektor, das die entsprechende Klasse



repräsentiert, auf 1 gesetzt (volle Wahrscheinlichkeit) und alle anderen Elemente auf 0 (Wahrscheinlichkeit 0).

### 8.3.3 Training des Klassifikationsnetzwerks

Neben der Trainingsdatenmenge wird zusätzlich eine Validierungsdatenmenge für das Training sowie eine Testdatenmenge für die Auswertung der neuronalen Netze benötigt. Die einzelnen Datenmengen sind wie folgt charakterisiert :

- *Trainingsdatenmenge* : Besteht aus den Trainingseingabe- und den dazugehörigen Trainingsausgabevektoren, die Anzahl  $N$  der Datenpaare ist 3100 die Trainingseingabevektoren beschreiben die Profilverläufe und bestehen aus  $\lambda = 162$  Elementen (81 für das Stokes-I-Profil und 81 für das Stokes-V-Profil). Die Trainingsausgabevektoren besitzt  $l = 8$  Elemente für die Klassifikation des Atmosphärenmodells der Umbra. Die Erstellung erfolgt per Zufallsgenerator auf der Grundlage der in Abschnitt 8.3.1 angegebenen Wertebereiche für die jeweiligen Parameter.
- *Validierungsdatenmenge* : Die Validierungsdatenmenge wird vom neuronalen Netz nicht trainiert, sie bleibt dem Netz unbekannt. In regelmäßigen Abständen wird dem neuronalen Netz während des Trainingsprozesses die unbekannte Validierungsmenge präsentiert. Das Aussageverhalten des neuronalen Netzes gegenüber der unbekanntem Validierungsmenge gibt Auskunft über das Generalisierungsverhalten des Netzes und kann somit als Abbruchkriterium des Trainings benutzt werden. Die Validierungsdatenmenge besteht ebenfalls aus 3100 Datenpaaren für Eingangs- und Ausgangsdaten. Die Dimension der Ein- und Ausgangsvektoren ist entsprechend der der Trainingsdaten. Die Erstellung erfolgt auch hier per Zufallsgenerator auf der Grundlage der in Abschnitt 8.3.1 angegebenen Wertebereiche für die jeweiligen Parameter.
- *Testdatenmenge* : Nachdem ein Netz mit akzeptablen Fehlerverhalten (6.8) und Generalisierungseigenschaften gefunden wurde, wird anhand der Testdatenmenge das Gesamtverhalten des Netzes statistisch bewertet. Die Testdatenmenge besteht auch aus 3100 Datenpaaren für Eingangs- und Ausgangsdaten. Die Dimension der Ein- und Ausgangsvektoren entspricht der der Trainingsdaten. Die Erstellung erfolgt auch wieder hier per Zufallsgenerator auf der Grundlage der in Abschnitt 8.3.1 angegebenen Wertebereiche für die jeweiligen Parameter.

Die skalierten Trainingsdatenmengen und Validierungsdatenmengen wurden in SNNS geladen und der verbesserte Backpropagation-Algorithmus, auf der Basis des Levenberg-Marquardt Verfahrens (Kapitel 6.4) wurde auf die jeweiligen Netztopologien angewandt. Zu Beginn eines jeden Trainingsdurchlaufes werden die Netzwerkparameter, d.h. die

Netzwerkgewichte, zufällig in einem Bereich zwischen  $-1$  und  $+1$  initialisiert. Während des Trainingsprozesses werden dem Netzwerk nacheinander alle Trainingsdatenpaare der Trainingsmenge präsentiert. Für jeden Vektor der Trainingsmenge wird der quadratische Fehler zwischen Ausgabevektor (vom neuronalen Netz berechneter Ausgabevektor) und dem Zielvektor (durch die Trainingsmenge vorgegebener Ausgabevektor) gemäß der folgenden Gleichung berechnet:

$$E_k = \sum_{l=1}^M (o_{kl} - y_{kl})^2 . \quad (8.7)$$

Dabei gibt  $o_{kl}$  die vom Netz berechnete Ausgabe an und  $y_{kl}$  die Zielausgabe der Trainingsmenge. Der Index entspricht wieder dem  $k$ -ten Trainingsvektor und erstreckt sich von  $k = 1, \dots, N$ , und der Index  $l$  ( $l = 1, \dots, 8$ ) gibt das  $l$ -te Element des Ausgabevektors bzw. Zielvektors an und entspricht der Wahrscheinlichkeit der durch  $o_{kl}$  repräsentierten Klasse. Der aufsummierte quadratische Fehler (sum squared error, SSE) über alle  $N$  Vektoren der Trainingsmenge, wird dann durch die zusätzliche Summation über alle Trainingsvektoren berechnet :

$$E_k = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (o_{kl} - y_{kl})^2 . \quad (8.8)$$

Ausgehend von diesem Fehler werden durch den Backpropagation-Algorithmus die partiellen Ableitungen der Netzwerkfunktion berechnet und somit der Schritt in Richtung des negativen Gradienten bestimmt, um damit die Netzwerkparameter (Netzwerkgewichte) iterativ anzupassen. Nach dem einmaligen Präsentieren der gesamten Trainingsdatenmenge wird die gesamte Datenmenge neu geordnet (per Zufallsgenerator) und erneut dem Netz präsentiert. Das **einmalige Präsentieren aller Trainingsdatenmengen** wird Epoche genannt und besteht somit, bei der Klassifikation der Modellatmosphäre, aus dem Präsentieren der 3100 Datenpaare.

Da der Netztyp (Multi-Layer-Perceptron) sowie die Aktivierungsfunktionen (Sigmoidfunktion) bereits feststehen, ist der Trainingsprozess hauptsächlich durch die Auswahl der Netztopologie und die Auswertung der jeweiligen Netztopologie bestimmt. Zunächst wurden eine Reihe verschiedener Netztopologien untersucht mit dem Ziel, die geeignete minimale Netzwerkstruktur einzugrenzen, welche der Komplexität des Klassifikationsproblems am besten entspricht. Aufgrund der mehr als 30 untersuchten Netzwerktopologien, deren Trainingsprozess zwischen 6 und 12 Stunden auf einer HP9000 Workstation betrug, wird im folgenden das Training desjenigen Netzwerks dargestellt, dessen Aussageergebnisse bei minimaler Netzwerkgröße (Anzahl der gewichteten Verbindungen) die kleinsten Fehler lieferten. Das Bewertungskriterium des Trainingsprozesses ist der summierte quadratische Fehler (8.8).

Das Netzwerk mit dem besten Aussageverhalten gemäß des SSE (8.8) war das Netzwerk mit der Topologie **166-17-8**. Dabei bezeichnet 166 die Anzahl der Eingabeneuronen (der

diskreten, skalierten Stokes-I- und Stokes-V-Profilen), 17 die Anzahl der Neuronen in der ersten verdeckten Schicht und 8 die Anzahl der Neuronen in der Ausgabeschicht (entsprechend den acht zu unterscheidenden Modellatmosphären). Der summierte quadratische Fehler für dieses Netzwerk betrug nach 1000 Epochen 0,214. Netzwerke mit größerer Topologie (mehr als 17 Neuronen in der verdeckten Schicht bzw. mehr als eine verdeckte Schicht) zeigen keine weitere signifikante Abnahme des summierten quadratischen Fehlers (8.8). Das Netzwerk mit dieser Topologie besitzt 2958 gewichtete Verbindungen ( $166 \cdot 17 + 17 \cdot 8$ ), da jede Schicht vollständig mit der nachfolgenden Schicht verbunden ist. In sofern sind die 3100 Trainingsdatenpaare für das 166-17-8 Netzwerk ausreichend, um das Problem überbestimmt zu erhalten (Kapitel 6.6).

### Sum Squared Error (SSE)

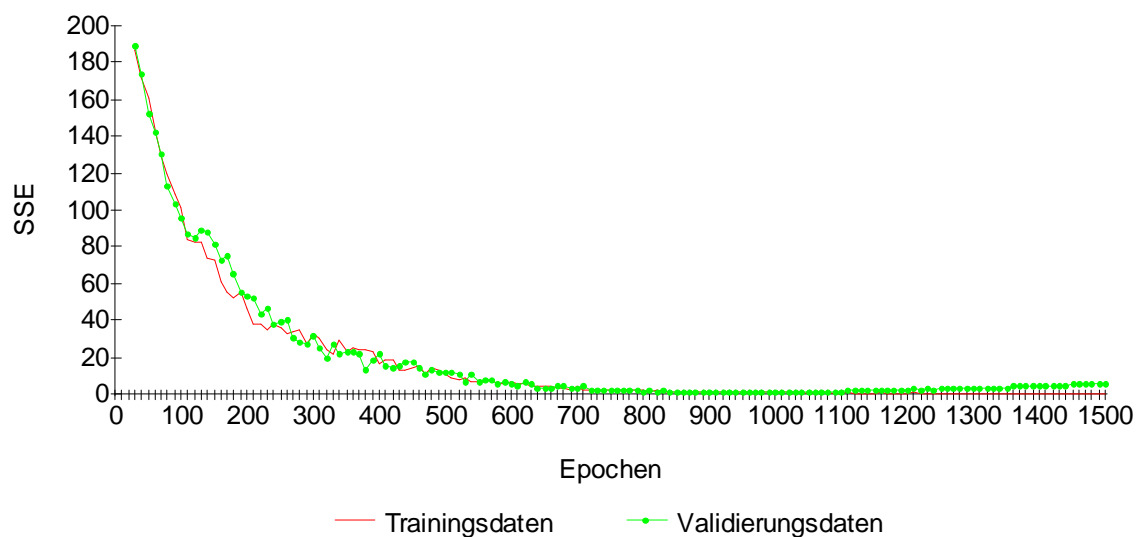


Abbildung 8.5 : Trainingsverlauf des ML-Backpropagation Verfahrens für das 166-17-8 Netzwerk

In der Abbildung 8.5 ist der Trainingsverlauf des Netzwerks 166-17-8 mit Hilfe des verbesserten Backpropagation auf der Basis des Levenberg-Marquardt-Algorithmus (im folgenden ML-Backpropagation) dargestellt. Der Trainingsverlauf mit dem ML-Backpropagation-Verfahren für das Netzwerk 166-17-8 zeigt deutlich die Abnahme des summierten quadratischen Fehlers (SSE) mit der Zunahme der Epochen des Trainings. Dabei wird also im hochdimensionalen Parameterraum - 2958 Netzwerkgewichte - des neuronalen Netzwerkes das Minimum nach der Funktion (8.8) aufgesucht.

Die Detaildarstellung in Abbildung 8.6 zeigt deutlich, wie der SSE für die Trainingsmenge sich asymptotisch einem Grenzwert nähert. Jedoch beginnt nach ca. 1050 Epochen der SSE für die Validierungsdatenmenge wieder anzusteigen. Dies ist klar der Effekt des Übertrainierens (Overtraining), der die Generalisierungseigenschaften wesentlich beeinträchtigt, wie in Kapitel 6.6 beschrieben. Die funktionalen Abhängigkeiten der Trainingsmenge werden dabei so gut adaptiert, dass das neuronale Netz selbst kleine Fehler und statistische Schwankungen innerhalb der Trainingsmenge zu erlernen beginnt.

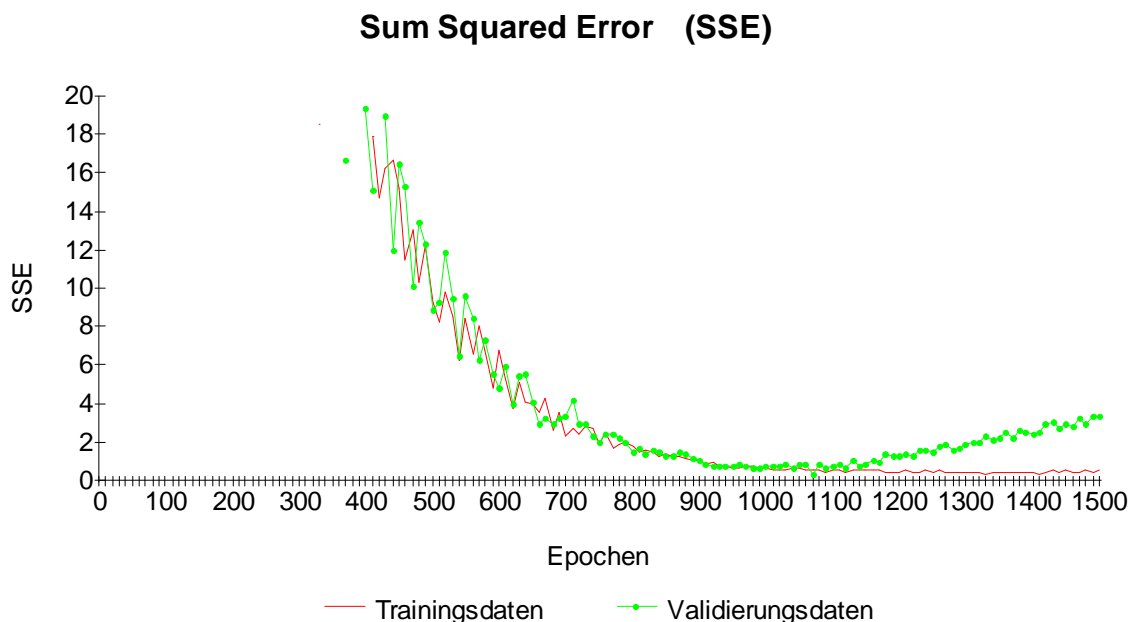


Abbildung : 8.6 : Detaildarstellung des Trainingsverlaufs

Somit wurde das Training nach 1000 Epochen abgebrochen und die Netzwerkarchitektur eingefroren. In dieser Konfiguration wird das neuronale Netz im nächsten Abschnitt im Anwendungsmodus mit der Testdatenmenge bewertet, d.h. es werden dem neuronalen Netz unbekannte Eingabevektoren präsentiert und dieses berechnet aufgrund der festen Netzwerkarchitektur für diese Eingangsvektoren Ausgaben im Sinne der durch die Trainingsmenge gefundenen funktionalen Abhängigkeit.

### 8.3.4 Test und Auswertung des Klassifikationsnetzwerks

Das Netzwerk mit den niedrigsten Fehlerwerten und der kleinsten Netztopologie aus dem vorherigen Abschnitt wird in diesem Abschnitt zur statistischen Untersuchung mittels der Testdatenmenge herangezogen. Dem Netzwerk werden 3100 unbekannte Profilverläufe präsentiert – Profilverläufe, die vom neuronalen Netz nicht trainiert wurden - und die Klassifikationseigenschaften überprüft. Das Netzwerk befindet sich jetzt also im Anwendungsmodus, d.h. es findet kein Training mit der Datenmenge statt. Aus den präsentierten Eingangsvektoren werden gemäss der trainierten funktionalen Abhängigkeit Ausgabevektoren berechnet, die aufgrund der in Kapitel 6.5 beschriebenen Eigenschaften die bedingte Wahrscheinlichkeiten für die jeweilige Klasse bzw. Modellatmosphäre angeben.

Folgende Festlegung wird für die Bewertung des Klassifikationsergebnisses getroffen: Die Modellatmosphäre wird als richtig klassifiziert angesehen, wenn die Differenz der Aktivität der Ausgabeelemente des neuronalen Netzwerkes und der Zielelemente der Testdatenmengenvektors zusammen kleiner als 0,1 ist, gemäß der folgenden Gleichung :

$$\Delta \text{Aktivität} = \sum_{l=1}^8 |\text{Netzaktivität}_l - \text{Zielaktivität}_l| \leq 0,1, \tag{8.9}$$

wobei sich  $l$  über die einzelnen Elemente des Ausgabe- bzw. Zielvektor erstreckt. Das bedeutet, dass die Gesamtabweichung des Ausgabevektors von dem Zielvektor weniger als 10% betragen darf. Die Ausgabe jedes Elementes des neuronalen Netzes ist durch die Aktivierungsfunktion, wie in Kapitel 6.1 bereits beschrieben, auf den Bereich 0 bis 1 beschränkt. Beispielsweise kann eine Klassifikation eines Eingangsvektors (skalierter Profilverlauf) zu folgendem berechneten Ergebnis bzw. Ausgabevektor führen :  $(0,001 ; 0,003 ; 0,997 ; 0,006 ; 0,01 ; 0,005 ; 0,007 ; 0,0003)^T$  ; der zu dem Profilverlauf gehörende Zielvektor lautet dann z.B.  $(0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0)^T$  , so dass die Gesamtabweichung gemäß Gleichung (8.8), 0,0353 beträgt. In diesem Fall wäre die Modellatmosphäre 3 (Klasse 3) mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7% als die wahrscheinlichste Atmosphäre klassifiziert worden, alle anderen Atmosphärenmodelle hätten weniger als 1% Wahrscheinlichkeit erhalten. Die absolute Gesamtabweichung  $\Delta A$  zwischen berechneter Netzausgabe und der „wahren Ausgabe“ (Zielvektor) wird gemäß der Gleichung

$$\Delta A = \sum_{l=1}^8 |\text{Netzaktivität}_l - \text{Zielaktivität}_l| \tag{8.10}$$

berechnet. Die folgende Abbildung 8.7 zeigt die Verteilung der absoluten Gesamtabweichungen der einzelnen Vektoren für die 3110 berechneten Testprofile.

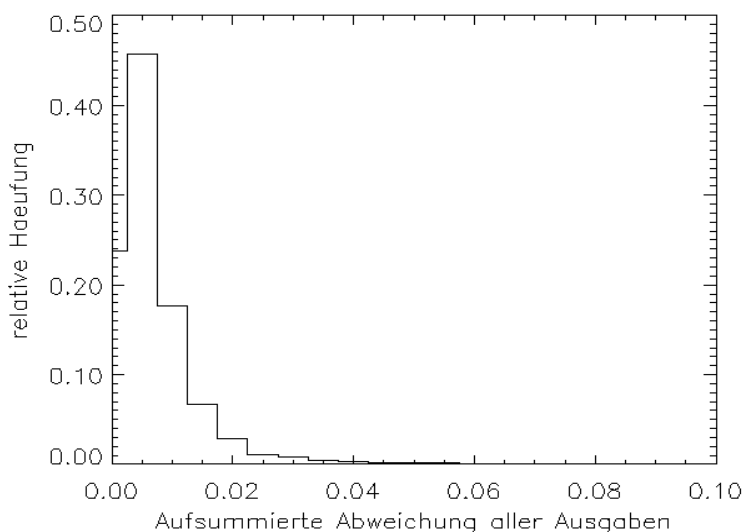


Abbildung 8.7 : Verteilung der absoluten Gesamtabweichung gemäß Gleichung (8.10). Deutlich zeigt sich die geringe Abweichung und Streuung der Werte.

Folgende Ergebnisse wurden bei der Untersuchung der absoluten Gesamtabweichung der 3100 Testdatenprofile erzielt :

Absolute Gesamtabweichung	$\Delta A$
Mittelwert	0,00927
Standardabweichung	0,00744
Maximum	0,07983
Minimum	0,00117

Unter Berücksichtigung des Klassifikationskriterium (8.9) sind **alle** Stokes-Profilverläufe durch das neuronale Netz **korrekt klassifiziert** wurden. Die außerordentlich guten Ergebnisse zeigen sich besonders deutlich in dem Mittelwert der Abweichungen mit 0,00927, was bedeutet, dass das richtige Neuron des berechneten Ausgabevektors stets über 99% Aktivität zeigte und alle anderen zusammen unterhalb von 1% Aktivität zeigten. Selbst für den Fall der größten Abweichung von 0,0798 ist die Aktivität des richtigen Neurons mindestens über 92% und aller anderen zusammen höchstens 8%. Weiterhin zeigt die sehr kleine Streuung der Ergebnisse (Standardabweichung 0,00744) die hohe Güte der vom neuronalen Netz berechneten Aussagen. Somit ist sehr eindrucksvoll gezeigt, dass das neuronale Netz in der Lage ist, mit hoher Genauigkeit, eine Bestimmung der Modellatmosphäre anhand der Stokes-Profildaten durchzuführen.

Messdaten enthalten niemals nur das reine Messsignal. Unweigerlich führen Beobachtungsbedingungen und Messaperatur zu einer Störung des ursprünglichen Signals. Aufgrund der in Kapitel 6 dargestellten guten Approximationseigenschaften von künstlichen neuronalen Netzen als auch durch die im Backpropagation-Algorithmus benutzte Fehlerfunktion (6.2) des quadratischen Fehlers besitzen Multi-Layer-Perceptronen besonders gute Eigenschaften im Umgang mit verrauschten Daten (Hornik 1991, Judd 1990, Holmes 1991). Aus diesem Grund wird zusätzlich das Aussageverhalten des ausgewählten neuronalen Netzes beim Vorhandensein von Rauschen untersucht. Dazu wird der unskalierten Testdatenmenge ein künstliche Rauschen aufgeprägt. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis S/N beträgt 100. Das bedeutet, dass den Stokes-I- und Stokes-V-Profilverläufen für jeden Wellenlängenpunkt ein normalverteilter Fehler mit einer Streuung bzw. Standardabweichung von 1/100 der Kontinuumsintensität aufgeprägt wurde.

Es gelten die gleichen Klassifizierungskriterien wie in Gleichung (8.9). Die absolute Gesamtabweichung zwischen berechneter Netzausgabe und der wahren Ausgabe (Zielvektor), wird wieder gemäß Gleichung (8.10) berechnet. Im folgenden ist die Verteilung der absoluten Gesamtabweichung für die verrauschten Stokes-Profildaten der Testdatenmenge dargestellt.

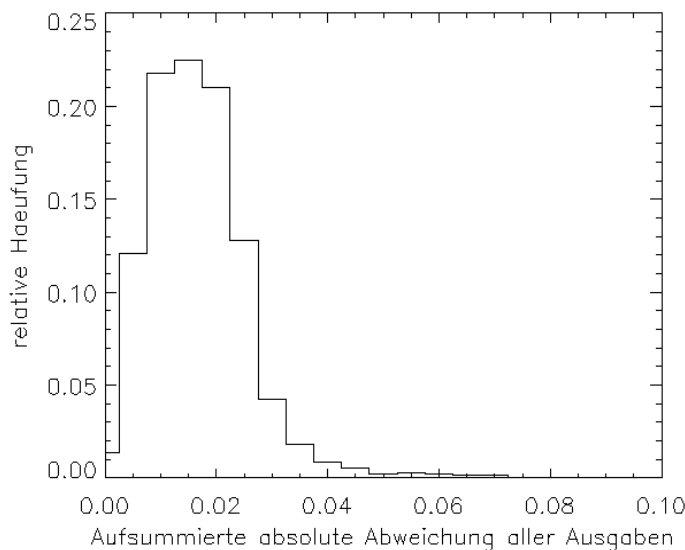


Abbildung 8.8 : Verteilung der absoluten Gesamtabweichung gemäß der Gleichung (8.10). Sie zeigt eine geringfügige Verbreiterung der Verteilung gegenüber der Abbildung 8.5 ohne Rauschen.

Für die 3110 untersuchten verrauschten Stokes-Profile wurden folgende Ergebnisse bezüglich der absoluten Gesamtabweichung erzielt :

Absolute Gesamtabweichung	$\Delta A$
Mittelwert	0,01940
Standardabweichung	0,00931
Maximum	0,09763
Minimum	0,00223

Auch hier wurden gemäß dem Klassifikationskriterium **alle** Profilverläufe **korrekt klassifiziert** und den richtigen Modellatmosphären zugeordnet. Die Ergebnisse sind wieder außerordentlich gut. Alle vier Bewertungsparameter sind nur leicht angestiegen. Mit einer mittleren absoluten Abweichung von weniger als 0,02 zeigen die richtigen Ausgabeneuronen im Durchschnitt mehr als 98% Aktivität, während alle anderen zusammen durchschnittlich weniger als 2 % Aktivität anzeigen. Auch die Streuung der Werte ist nur leicht angestiegen. So zeigt sich das ausgewählte neuronale Netz robust gegen verrauschte Daten mit einem Signal zu Rauschverhältnis von 100.

Die Klassifikation der Stokes-Profilverläufe nach den zugrundeliegenden Modellatmosphären durch ein künstliches neuronales Netz ist somit mit großer Genauigkeit möglich. Obwohl die übrigen atmosphärischen Parameter wie Magnetfeldstärke, Ausrichtung des Magnetfeldes (Inklination, Azimut), Doppler-Geschwindigkeit sowie Mikroturbulenz, beliebig variiert werden, bleiben die jeweiligen charakteristischen Einflüsse der einzelnen Modellatmosphären

auf die Stokes-Profile erhalten und sind für das neuronale Netz unterscheidbar. Die funktionale Abhängigkeit bleibt auch dann erhalten und für das neuronale Netz erkennbar, wenn den Profildaten ein Rauschen beigefügt wird.

## 8.4 Bestimmung physikalischer Parameter mit neuronalen Netzen

In diesem Abschnitt werden die neuronalen Netze erstellt und bewertet, die die eigentliche Berechnung bzw. Inversion zur Gewinnung der atmosphärischen Parametern durchführen. Ausgehend vom Klassifikationsergebnis wird das jeweilige neuronale Netz, das unter den klassifizierten Atmosphärenmodell trainiert wurde, aufgerufen und führt die Inversion der Stokes-Profildaten durch. Aufgrund der Vielzahl an untersuchten Parameternetzwerken und erzielten Ergebnissen soll das Training für ein Klasse von Parameternetzwerken bzw. einer Klasse von Atmosphärenmodellen exemplarisch beschrieben werden. So werden im folgenden für die bereits vorgestellte semiempirische Modellatmosphäre MK (Maltby et. al. 1986) die zugehörigen Parameternetzwerke erstellt, trainiert und ausgewertet. Das heißt, den jeweiligen neuronalen Netzen werden Stokes-Profile für das Training präsentiert, die unter der Modellatmosphäre MK synthetisch erzeugt wurden.

In diesem Abschnitt werden zunächst die Erzeugung der Trainingsdaten und die Aufbereitung der Trainingsdaten beschrieben. Anschließend wird der Trainingsprozess beschrieben, und am Ende dieses Kapitels findet eine Auswertung der Berechnungsgenauigkeit der Parameternetzwerke statt.

### 8.4.1 Auswahl und Erzeugung der Trainingsdaten

Im folgenden sollen nochmals die in Abschnitt 7.1 vorgestellten Inversionsparameter aufgelistet werden, die es anhand der Stokes-Profilverläufe mit dem Parameternetzwerk zu bestimmen gilt :

- Magnetfeldstärke,
- Magnetfeldausrichtung bezüglich der Sichtlinie (Inklination),
- azimutale Ausrichtung des Magnetfeldes (Azimut),
- Doppler-Geschwindigkeit,
- Mikroturbulenz.

Um wie bereits bei den Klassifikationsnetzwerken die Anzahl der freien Parameter des neuronalen Netzes zu begrenzen, sollen auch hier wiederum nur jeweils zwei Stokes-Parameter für den Eingangsvektor benutzt werden. Dazu soll zum einen nur das Stokes-I- und Stokes-V-Profil benutzt werden. Aufgrund der Strahlungstransportgleichung (3.44) ist jedoch der Effekt einer Winkeländerung des Azimut nur indirekt über den magnetooptischen Effekt in den Stokes-I- und Stokes-V-Profilen bemerkbar. Da dieser Effekt sehr klein ist, wird der Azimutwinkel in einem gesonderten Parameternetzwerk bestimmt. In diesem Netzwerk



werden dann die Stokes-Q- und Stokes-U-Profile benutzt, da diese die linearpolarisierten Komponenten beinhalten und den Effekt einer azimuthalen Änderung deutlicher widerspiegeln. Als Eingangsvektoren werden somit das diskrete Stokes-I- und Stokes-V-Profil für die Bestimmung der Magnetfeldstärke, Inklination, Doppler-Geschwindigkeit und Mikroturbulenz benutzt und andererseits das Stokes-Q- und Stokes-U-Profil für die Bestimmung des Azimuts. Damit ist gleichzeitig die Anzahl der Ausgabeneuronen bzw. die Dimension des Ausgabevektors auf vier bzw. einen festgelegt. Somit werden in diesem Abschnitt zwei Typen von Parameternetzwerke beschrieben. Zur Unterscheidung der jeweiligen Netzwerke wird folgende Bezeichnungsweise eingeführt: Zuerst kommt die Kurzbezeichnung der Modellatmosphäre, auf dessen Grundlage das neuronale Netz trainiert wurde, darauf folgend die Anfangsbuchstaben der zu bestimmenden Parameter.

- *MK-MIDM*: Ist das auf der Grundlage der Stokes-I- und Stokes-V-Profile sowie der Modellatmosphäre MK trainierte Parameternetzwerk für die Bestimmung der Magnetfeldstärke, Inklination, Doppler-Geschwindigkeit und Mikroturbulenz.
- *MK-A* : Auf der Grundlage der Stokes-Q- und Stokes-U-Profile sowie der Modellatmosphäre MK trainiertes Parameternetzwerk für die Bestimmung des Azimuts.

Die Stokes-I- und Stokes-V-Profile bzw. Stokes-Q- und Stokes-U-Profile werden in einem Bereich von  $\pm 300 \text{ m\AA}$  um das Linienzentrum in diskreten Werten mit einem gleichmäßigen Abstand von  $10 \text{ m\AA}$  dargestellt. Im Gegensatz zum Klassifikationsnetzwerk ist der Wellenlängenbereich verkürzt worden, da hier davon ausgegangen wird, dass sich die charakteristischen Profilinformationen für die Bestimmung der jeweiligen Parameter, in einem Bereich von ca.  $\pm 300 \text{ m\AA}$  um das Linienzentrum befinden. Das bedeutet, dass die Stokes-I- und Stokes-V-Profile bzw. Stokes-Q- und Stokes-U-Profile mit jeweils 61 Datenpunkten dargestellt werden. Damit ist gleichzeitig die Anzahl der Eingangsneuronen bzw. die Dimension des Eingangsvektors der neuronalen Netze auf 122 festgelegt. Die Intensität der jeweiligen Stokes-Profile ist mit der Kontinuumsintensität bei  $5000 \text{ \AA}$  normiert. Die Abbildung 8.9 zeigt schematisch die Aufteilung in die zwei Netzwerktypen zur Bestimmung der atmosphärischen Parameter. Als Absorptionslinie wird die in Kapitel 7 vorgestellte Fe I Linie bei  $6302.5 \text{ \AA}$  benutzt. Die Erstellung der synthetischen Profile wurde mit dem bereits beschriebenen Strahlungstransportprogramm DIAMAG durchgeführt. Die synthetischen Profile stellen die Grundlage dar, auf deren Basis die künstlichen neuronalen Netze das funktionale Verhalten zwischen den Stokes-Profilverläufen und den Parametern ermitteln soll. Um realistische Wertebereiche für die einzelnen Parameter - innerhalb der Umbraatmosphäre - zu erhalten, wurden anhand der Umbramodellatmosphären von Collados (1994) großzügige Abschätzungen für die einzelnen Bereiche der Parameter getroffen. Die Festlegung der Bereiche für die Trainingsmenge bestimmt gleichzeitig den Bereich, für den die neuronalen Netze später in der Lage sind, sinnvolle Berechnungsergebnisse zu liefern.

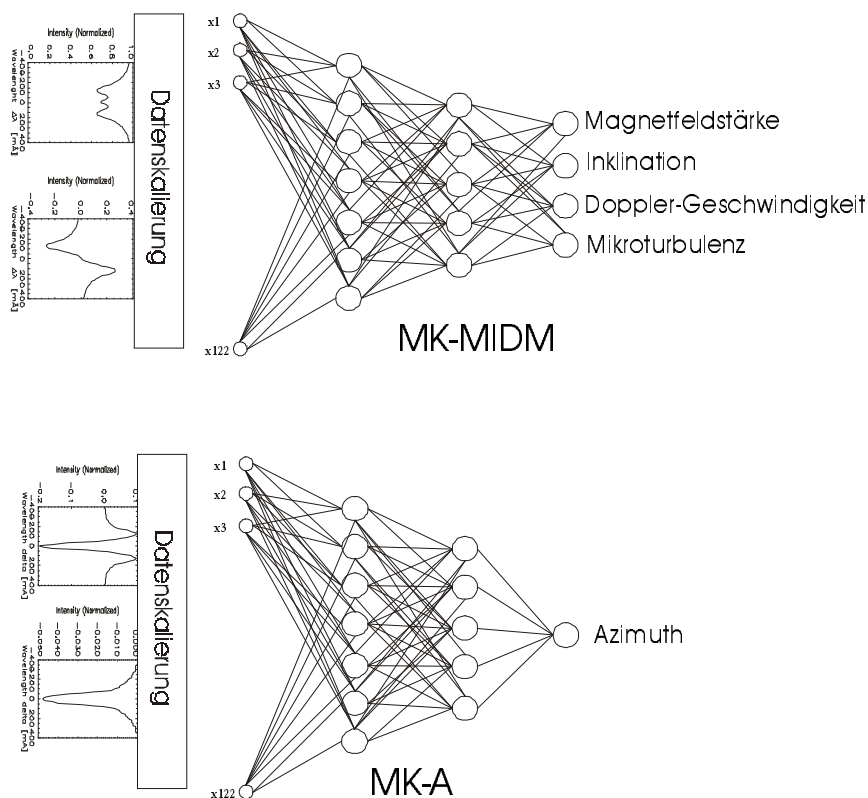


Abbildung 8.9 : Schematische Darstellung der zwei Netzwerktypen für die Inversion der Stokes-Profilen. Je nach Netztyp dienen die Stokes-I- und Stokes-V-Profile bzw. die Stokes-Q- und Stokes-U-Profile als Eingabevektoren in das neuronale Netz. Diese sind auf der Grundlage der Modellatmosphären MK synthetisch erstellt worden.

Im folgenden sind die Parameterbereiche dargestellt, innerhalb derer die Parameter, bei der Erzeugung der Trainingsdatenmenge variiert werden.

- *Magnetfeldstärke* : 400 G bis 3800 G
- *Inklination* : 0° bis 90°
- *Doppler-Geschwindigkeit* : -2000 m/s bis +2000 m/s
- *Mikroturbulenz* : 0 m/s bis 1400 m/s
- *Azimuth* : 0° bis 180°

Per Zufallsgenerator wurden so beliebige Kombinationen aus den oben angegebenen Bereichen dieser Parameter ausgewählt und damit die synthetischen Stokes-I- und Stokes-V- bzw. Stokes-Q- und Stokes-U-Profile erzeugt. Der Zufallsgenerator arbeitet auf der Basis einer Gleichverteilung, damit ist gewährleistet, dass die Bereichsintervalle für jeden Parameter gleichmäßig durch den Zufallsgenerator abgedeckt werden. Insgesamt wurden so für jeden Netzwerktyp drei Mengen mit je 5000 synthetischen Stokes-I- und Stokes-V- bzw. Stokes-Q- und Stokes-U-Profilen erzeugt. Zu den drei Mengen gehören die Trainingsdatenmenge für den eigentlichen Trainingsvorgang der neuronalen Netze, die Validierungsdatenmenge für die Überprüfung der Generalisierungseigenschaften während des

Trainingsvorgangs und die Testdatenmenge für die Beurteilung der Aussagegenauigkeit des trainierten neuronalen Netzes. Zu jedem Eingangsvektor, bestehend aus den diskreten Stokes-I- und Stokes-V-Profilen bzw. Stokes-U- und Stokes-Q-Profilen, werden die jeweiligen atmosphärischen Parameterwerte Magnetfeldstärke, Inklination, Doppler-Geschwindigkeit, Mikroturbulenz bzw. Azimut als zugehöriger Zielvektor mit abgespeichert.

Die große Zahl von 5000 synthetischen Trainingsdatenpaaren wurden aufgrund der hohen Zahl von 122 Eingangsneuronen (Elemente) gewählt, da hierdurch zum einen mit einer großen Zahl an Netzwerkparameter (gewichteten Verbindungen) bzw. Freiheitsgrade des Parameternetzwerkes zu rechnen ist und zum anderen die Komplexität des Lernproblems – das inverse Problem – für die neuronalen Parameternetzwerke als größer eingeschätzt wird als bei der Klassifikation.

## 8.4.2 Datenaufbereitung

Auch bei den Parameternetzwerken kann eine geeignete Datenaufbereitung der Eingangs- und Ausgangsdaten des neuronalen Netzes von großer Bedeutung für die Adaptionfähigkeit des Netzwerkes an das inverse Problem sein. Wie bereits in Abschnitt 8.3.2 beschrieben, findet auch hier eine Aufbereitung der Eingangsdaten (Stokes-Profilverläufe) statt. Da diesmal jedoch die neuronalen Netze nicht als Klassifikatoren benutzt werden, sondern als Approximationsnetze, müssen auch die Ausgabewerte skaliert werden. Aufgrund dessen, dass die hier verwendeten neuronale Netze einen durch die Aktivierungsfunktion (Sigmoidfunktion) der jeweiligen Neuronen vorgegebenen Abbildungsbereich innerhalb des offenen Intervalls von (0,1) haben, müssen die Parameterwerte in dieses Intervall skaliert werden. Die Skalierung der Parameterwerte erfolgt in einem Bereich zwischen 0,1 bis 0,9, um noch Spielraum für berechnete Werte zu geben, die außerhalb des festgelegten Bereichs der Parameter liegen. Die Skalierung der einzelnen Ausgabewerte wird wie folgt vorgenommen :

$$SkalParam = (Param - MinParam) \cdot \frac{0,9 - 0,1}{MaxParam - MinParam} + 0,1. \quad (8.11)$$

Dabei ist *SkalParam* der skalierte Parameterwert, *Param* der ursprüngliche Parameterwert, *MinParam* der untere Wert des Parameterbereichs und *MaxParam* der obere Wert des Parameterbereichs. Die Skalierung der Eingangsvektoren (Profilverläufe) wird in der gleichen Weise vorgenommen wie bei den Klassifikationsnetzwerken. Die Skalierung des Profilwertes *I* in den skalierten Wert *X* wird wieder nach der Gleichung (8.4) vorgenommen :

$$X_{\lambda k} = \frac{I_{\lambda k} - \bar{I}_{\lambda}}{\sigma_{\lambda}}, \text{ wobei } k = 1, \dots, N \text{ und } \lambda = 1, \dots, M.$$

Der Index *k* läuft dabei über die Anzahl *N* der Trainingsdatenpaare und der Index *λ* verläuft über die Anzahl *M* der diskreten Wellenlängenpunkte. Der Mittelwert des Profilwertes *I* für

einen diskreten Wellenlängenpunkt  $\lambda$  wird gebildet über alle in der Datenmenge enthaltenen Eingangsprofile (Eingangsvektoren) und ist gegeben durch Gleichung (8.5) :

$$\bar{I}_\lambda = \frac{\sum_{k=1}^N I_{\lambda k}}{N} .$$

Die Standardabweichung  $\sigma$  für einen bestimmten Wellenlängenpunkt  $\lambda$  des Eingangsprofils wird gebildet über alle Eingangsvektoren der Trainingsdatenmenge und ist gegeben durch Gleichung (8.6) :

$$\sigma_\lambda = \frac{\sum_{k=1}^N (I_{\lambda k} - \bar{I}_\lambda)^2}{N - 1} .$$

Auf diese Weise bekommen die skalierten Werte jedes diskreten Wellenlängenpunktes eine Standardabweichung von 1 und liegen somit relativ eng um den Wert 0 verteilt. Weiterhin werden so die diskreten Wellenlängenpunkte der einzelnen Eingabevektoren mit jedem anderen aus der Trainingsdatenmenge in Beziehung gesetzt und somit eine bessere relative Gewichtung erreicht. Konkret bedeutet das: Während vorher aufgrund der Änderung eines oder mehrerer atmosphärischer Parameter nur kleine Änderungen an bestimmten Wellenlängenpunkten der Eingangsprofile zu beobachten waren, wird diese Änderung aufgrund der angegebenen Skalierung aufgeweitet. So wird selbst bei kleinen Änderungen eine entsprechende Gewichtung gegeben.

Die Skalierung der Validierungs- und Testdatenmengen geschieht auf die gleiche Weise wie oben beschrieben. Dabei ist aber zu beachten, dass die Durchschnittswerte und die Standardabweichungen der einzelnen Wellenlängenpunkte gemäss (8.5) und (8.6) der Trainingsdatenmenge zugrundegelegt werden. Somit wird sichergestellt, dass die richtige Einordnung in die jeweiligen Intervalle der diskreten skalierten Wellenlängenpunkte gegeben ist.

### 8.4.3 Training der Parameternetzwerke

Neben der Trainingsdatenmenge werden wieder wie in Abschnitt 8.3.3 beschrieben eine Validierungsdatenmenge für das Training sowie eine Testdatenmenge für die Auswertung der neuronalen Netze benötigt. Die Profildaten der einzelnen Datenmengen werden auch hier wieder auf der Grundlage der Wertebereiche für die atmosphärischen Parameter aus Abschnitts 8.3.1 erzeugt.

Da auch hier wiederum der Netztyp (Multi-Layer-Perceptron) sowie die Aktivierungsfunktionen (Sigmoidfunktion) bereits feststehen, ist der Trainingsprozess hauptsächlich durch die Auswahl der Netztopologie und die Auswertung der jeweiligen Netztopologien gegeben. Zunächst wurde eine Reihe verschiedener Netztopologien

untersucht mit dem Ziel, die geeignete minimale Netzwerkstruktur einzugrenzen, die der Komplexität des inversen Problems angemessen ist. Die skalierten Trainingsdatenmengen und Validierungsdatenmengen wurden in SNNS geladen und mit dem ML-Backpropagation-Algorithmus trainiert. Zu Beginn eines jeden Trainingsdurchlaufes werden die Netzwerkparameter, d.h. die Netzwerkgewichte, zufällig in einem Bereich zwischen  $-1$  und  $+1$  initialisiert. Während des Trainingsprozesses werden dem Netzwerk nacheinander alle Trainingspaare der Trainingsdatenmenge präsentiert und, wie bereits in 8.3.3 bzw. in 6.4 beschrieben, daraufhin iterativ das Minimum der Fehlerfunktion (8.8) des Parameterraums des neuronalen Netzes aufgesucht. Nach dem einmaligen Präsentieren der gesamten Trainingsdatenmenge wird die gesamte Datenmenge neu geordnet (per Zufallsgenerator) und erneut dem Netz präsentiert. Dieser Durchlauf wurde für die untersuchten Netzwerke 1000 bis 2000 mal wiederholt, d.h. es wurden 1000 bis 2000 Epochen pro Netzwerk trainiert. Aufgrund der großen Anzahl an Trainingsdatenpaaren von 5000 sowie der relativ großen Netzwerktopologie der Parameternetze dauerte ein Trainingsprozess für ein einzelnes Netzwerk zwischen 12 und 24 Stunden auf einer HP9000 Workstation.

Aufgrund der mehr als 20 verschiedenen Netzwerktopologien, die für jeden Netztypen untersucht wurden, soll auch hier nur der Trainingsverlauf der Netzwerke vorgestellt werden, welche die größte Aussagegenauigkeit bezüglich des summierten quadratischen Fehlers (SSE) gemäss Gleichung (8.8)

$$E_k = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M (o_{kl} - y_{kl})^2 ,$$

lieferten. Dabei läuft der Indize  $l$  über die Anzahl der Ausgabeneuronen und der Indize  $k$  über die Anzahl der zur Verfügung stehenden Trainingsdatenpaare.

Im den folgenden beiden Abschnitten werden für die jeweiligen Netztypen die ermittelte Topologie sowie die Trainingsergebnisse beschrieben.

### 8.4.3.1 Training des Netzwerktyps MK-MIDM

Die Topologie mit dem besten Aussageverhalten gemäss des SSE (8.8) ist die Netzwerktopologie 122-25-20-4, d.h. 122 Eingabeneurone, 30 Neuronen in der ersten verdeckten Schicht, 20 Neuronen in der zweiten verdeckten Schicht und 4 Ausgabeneuronen. Der erreichte summierte quadratische Fehler lag bei 2,241. Netzwerke mit größerer Topologie (mehreren Neuronen in den jeweiligen Schichten bzw. mehreren verdeckten Schichten) zeigen keine weitere signifikante Abnahme des summierten quadratischen Fehlers (8.8). Im Gegenteil, es zeigte sich bei größeren Netzwerken eine Verschlechterung der Aussagegenauigkeit bezüglich der Validierungsdatenmenge und damit ein schlechteres Generalisierungsverhalten gegenüber unbekanntem Daten. Das Netzwerk besitzt somit  $(122 \cdot 25 + 25 \cdot 20 + 20 \cdot 4) = 3630$  freie Parameter und hat somit weniger freie Parameter als zur Verfügung stehende Trainingsdatenpaare und bleibt, gemäss der Forderung aus Abschnitt 6.6, überbestimmt. In der folgenden Abbildung 8.10 ist wieder der SSE (8.8) über die

Epochen für das Netzwerk 122-25-20-4 dargestellt. Diese Abbildung zeigt, wie der ML-Backpropagation-Algorithmus eine ständig bessere Zuordnung von berechneten Ausgabevektor und Zielvektor erreicht. Dies wird durch den raschen Abfall des summierten quadratischen Fehlers (SSE) mit der Zunahme der Epochen verdeutlicht. Damit wird unmittelbar das iterative Absteigen, gemäß der Gleichung (8.8), innerhalb des hochdimensionalen Parameterraum des neuronalen Netzes angezeigt.

### Sum Squared Error (SSE)

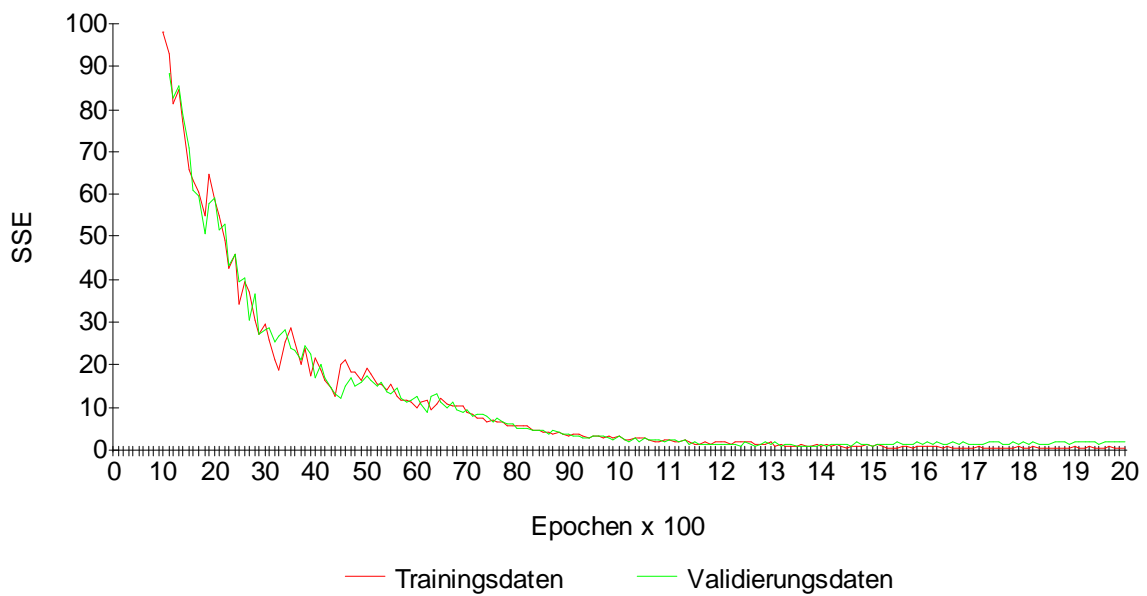


Abbildung 8.10 : Trainingsverlauf des ML-Backpropagation Verfahrens für das 166-25-20-4 Netzwerk

### Sum Squared Error (SSE)

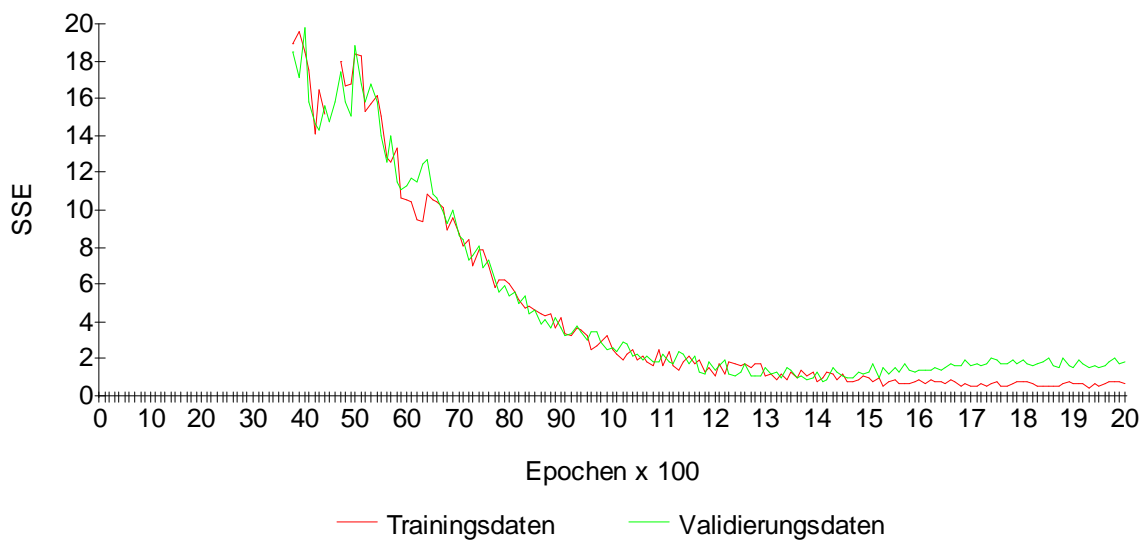


Abbildung 8.11 : Detaildarstellung des Trainingsverlaufs für das 122-25-20-4 Netzwerk

In der Detaildarstellung 8.11 des Trainingsprozesses ist gut zu erkennen, wie der SSE asymptotisch dem minimalen Berechnungsfehler zustrebt. Gleichzeitig ist auch ein Abnehmen des oszillatorischen Verhaltens des SSE zu erkennen, dies ist eine Folge des sich adaptiv verhaltenen ML-Backpropagation-Algorithmus, der mit Annäherung an das Minimum der Funktion (8.8) die Schrittweite anpasst.

In Detaildarstellung 8.11 ist weiterhin gut das divergente Verhalten des SSE der Validierungsdatenmenge ab ca. 1450 Epochen zu erkennen. Dies ist wieder ein Anzeichen dafür, dass die Generalisierungseigenschaften des neuronalen Netzes schlechter zu werden beginnen. Aus diesem Grund wurde das Training bei 1450 Epochen abgebrochen und die Netzarchitektur – die gewichteten Verbindungen - eingefroren.

### 8.4.3.2 Training des Netzwerktyps MK-A

Das Netzwerk für die Bestimmung des Azimutwinkels mit dem kleinsten summierten quadratischen Fehler (SSE) hat eine Netzwerktopologie von **122-20-15-1**, d.h. 122 Eingabeneurone, 30 Neuronen in der ersten verdeckten Schicht, 20 Neuronen in der zweiten verdeckten Schicht und 4 Ausgabeneuronen. Das Netzwerk erreichte einen SSE von 1,877. Netzwerke mit größerer Topologie (mehreren Neuronen in den jeweiligen Schichten bzw. mehreren verdeckten Schichten) zeigen auch hier keine signifikante Abnahme des summierten quadratischen Fehlers (8.8). Das Netzwerk besitzt somit  $(122 \cdot 20 + 20 \cdot 15 + 15 \cdot 1) = 2755$  freie Parameter. Die Anzahl der freien Parameter ist auch hier wieder kleiner als die zur Verfügung stehende Anzahl von 5000 Trainingsdatenpaaren. Somit bleibt, gemäß der Forderung aus Abschnitt 6.6, das Parameternetzwerk überbestimmt. In der folgenden Abbildung 8.12 ist wieder der SSE (8.8) über die Epochen für das Netzwerk 122-20-15-1 dargestellt. Diese Abbildung zeigt, wie der ML-Backpropagation-Algorithmus eine ständig bessere Zuordnung von berechneten Ausgabevektor und Zielvektor erreicht. Dies wird durch den raschen Abfall des summierten quadratischen Fehlers (SSE) mit der Zunahme der Epochen verdeutlicht. Damit wird unmittelbar das iterative Absteigen, gemäß der Gleichung (8.8), innerhalb des hochdimensionalen Parameterraum des neuronalen Netzes angezeigt.

In der Detaildarstellung 8.13 des Trainingsprozesses ist wiederum gut zu erkennen, wie der SSE asymptotisch dem minimalen Berechnungsfehler zustrebt. Gleichzeitig ist auch wieder ein Abnehmen des oszillatorischen Verhaltens des SSE aufgrund des adaptiven Verhaltens des ML-Backpropagation-Algorithmus zu erkennen. Auch hier ist wieder sehr gut das divergente Verhalten des SSE der Validierungsdatenmenge ab ca. 1000 Epochen zu erkennen. Dies ist wieder ein Anzeichen dafür, dass die Generalisierungseigenschaften des neuronalen Netzes beginnen, schlechter zu werden. Aus diesem Grund wurde das Training bei 1000 Epochen abgebrochen und die Netzarchitektur – die gewichteten Verbindungen - eingefroren. Mit dieser festen Netzwerktopologie wird das neuronale Netz in Abschnitt 8.4.4 auf die Aussagegenauigkeiten hin untersucht.

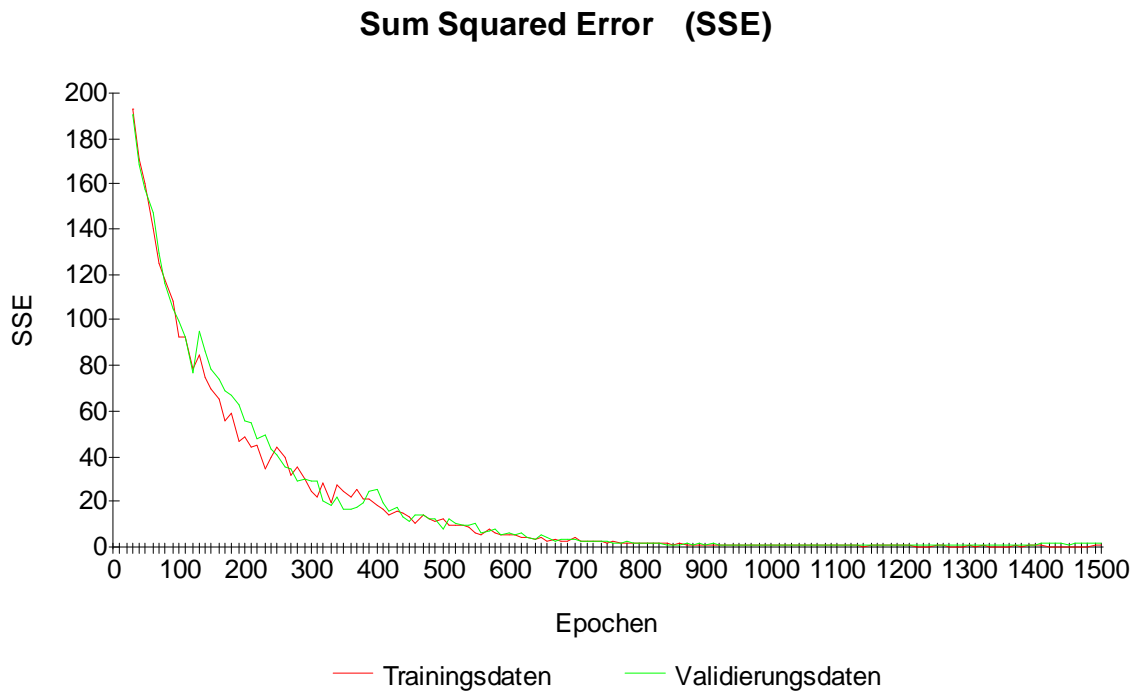


Abbildung 8.12 : Trainingsverlauf des ML-Backpropagation Verfahrens für das 166-20-15-1 Netzwerk

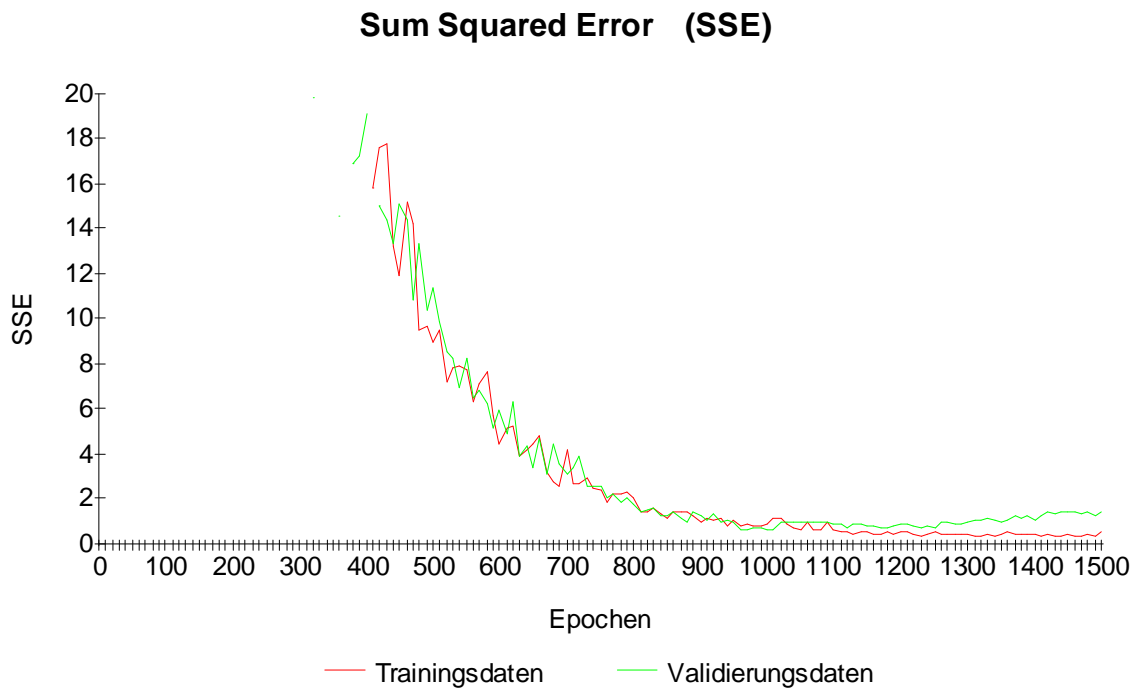


Abbildung 8.13 : Detaildarstellung des Trainingsverlaufs für das 122-20-15-1 Netzwerk



### 8.4.4 Tests und Bewertung der Parameternetzwerke

Die vorgestellten Netzwerke für die verschiedenen Netzwerktypen mit den niedrigsten Fehlerwerten und der kleinsten Netztopologie werden in diesem Abschnitt für die statistischen Untersuchung mittels der Testdatenmenge herangezogen. Den Netzwerken werden also 5000 unbekannte Profilverläufe präsentiert – Profilverläufe, die vom neuronalen Netz nicht trainiert wurden - und auf ihr Aussageverhalten hin untersucht. Auch für die Erzeugung der Profildaten der Testdatenmenge wurde wieder die gleichen Wertebereich wie für die Trainingsdatenmenge benutzt. Das Netzwerk befindet sich jetzt also im Anwendungsmodus, d.h. es findet kein Training mit der Datenmenge statt, sondern aus den präsentierten Eingangsvektoren werden gemäss der trainierten funktionalen Abhängigkeit Ausgabevektoren berechnet. Aufgrund dessen, dass die Eingangsvektoren und Ausgangsvektoren der Testdatenmenge wie bereits beschrieben skaliert worden sind, müssen die von den jeweiligen Parameternetzen berechneten Werte wieder reskaliert werden, um die Parameterwerte in den jeweiligen Einheiten zu erhalten. Die Reskalierung der Werte geschieht durch die Umstellung der Gleichung (8.11) nach dem Parameterwert *Param* :

$$SkalParam = (SkalParam - 0,1) \cdot \frac{MaxParam - MinParam}{0,9 - 0,1} + MinParam . \quad (8.12)$$

Dabei ist *SkalParam* der skalierte Parameterwert, *Param* der Parameterwert, *MinParam* der untere Wert des Parameterbereichs und *MaxParam* der obere Wert des Parameterbereichs. Nach der Reskalierung der Werte werden diese für die Auswertung mit den wahren Werten - die den unbekannt Testprofilen zugrunde liegen - verglichen. Dabei wird die absolute Abweichung gemäss der folgenden Beziehung betrachtet :

$$absolute\ Abweichung = |berechneterWert - wahrerWert| . \quad (8.13)$$

#### 8.4.4.1 Auswertung des Parameternetzwerk MK-MIDM

Dem neuronalen Netz des Typ MK-MIDM mit der Topologie 122-25-20-4 werden 5000 unbekannte Paare von Stokes-I- und Stokes-V-Profilen präsentiert. Dabei wurden von dem neuronalen Netz simultan die Werte für die Magnetfeldstärke, der Inklination, der Doppler-Geschwindigkeit und der Mikroturbulenz berechnet.

Für die dem Parameternetz präsentierten 5000 Testprofile ergaben sich somit bezüglich der berechneten Magnetfeldstärken folgende Werte für die absolute Abweichung :

Abweichung der Magnetfeldstärke	in Gauß
Mittelwert	14,77
Standardabweichung	11,51
Maximum	73,40
Minimum	0,00
mittlere prozentuale Abweichung	0,84 %

Die folgenden Abbildung 8.14 zeigt die Verteilung der Abweichungen zwischen den vom Parameternetz berechneten Werten der Magnetfeldstärke und den wahren Werten, auf deren Grundlage das unbekannte Testprofil erstellt wurde. Weiterhin sind die vom Parameternetz berechneten Werte über die wahren Werte aufgetragen, deren Verlauf im Idealfall einer Geraden mit der Steigung eins entspricht (dünne weiße Linie).

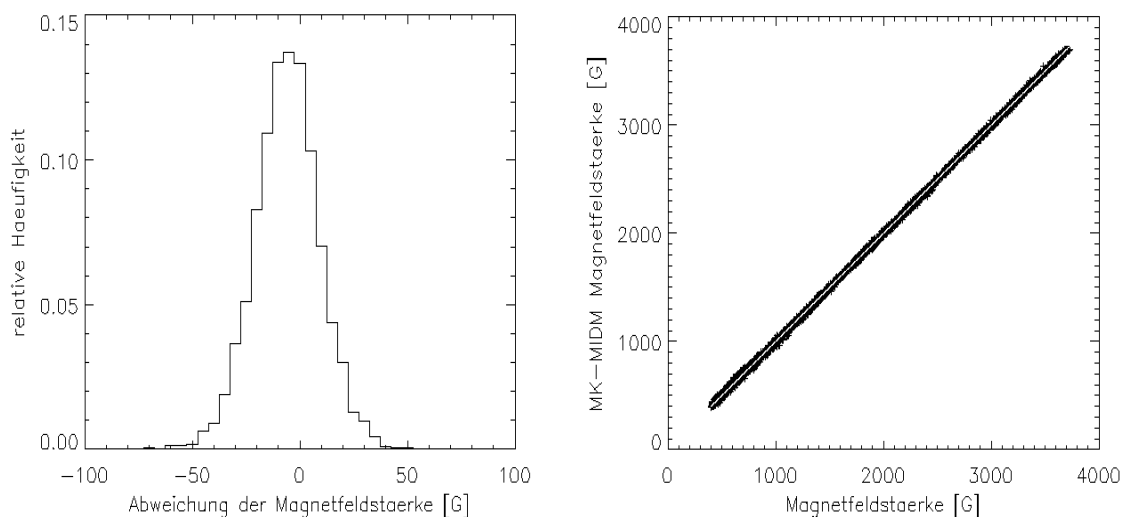


Abbildung 8.14 : Im linken Teil ist die Verteilung der Abweichungen der Magnetfeldstärke von den wahren Werten dargestellt. Der rechte Teil zeigt die vom neuronalen Netz berechnete Magnetfeldstärke (Ordinate) über der wahren Magnetfeldstärke (Abzisse).

Diese Ergebnisse zeigen sehr deutlich die hohe Genauigkeit der Berechnungen des neuronalen Netzes. Bei den 5000 untersuchten Testprofilen wurde eine mittlere Abweichung von weniger als 1% bzw. eine mittlere absolute Abweichung von weniger als 15 Gauß erreicht. Auch die Streuung der Ergebnisse ist mit 11,51 Gauß sehr gering. Selbst die schlechteste, vom neuronalen Netz berechnete Magnetfeldstärke zeigt nur eine Abweichung von 73,4 Gauß gegenüber dem wahren Wert. Im rechten Teil der Abbildung 8.14 sind die Einträge der berechneten Magnetfeldstärken durch Kreuze (+) dargestellt. Aufgrund der hohen Anzahl der Testprofile (5000) und dem außerordentlich guten Berechnungsverhalten des neuronalen Netzes sind die einzelnen Kreuze entlang der idealen Gerade (dünne weiße Linie) kaum zu unterscheiden. Diese Darstellung zeigt sehr anschaulich nochmals die geringe

Streuung der berechneten Werte um die wahren Werte. Mehr als 97 % der Ergebnisse für die absolute Abweichung lagen innerhalb der 3-fachen Standardabweichung. Also mehr als 97%, der 5000 getesteten Profildaten hatten eine Abweichung von weniger als  $\pm 34$  Gauß.

Für die 5000 dem neuronalen Netz präsentierten Testprofile ergaben sich bezüglich der berechneten absoluten Abweichung der **Inklinationswinkel** folgende Werte :

Abweichung der Inklination	in rad
Mittelwert	0,012
Standardabweichung	0,011
Maximum	0,079
Minimum	0,000
mittlere prozentuale Abweichung	4,94 %

Abbildung 8.15 zeigt die Verteilung der Abweichungen bezüglich der Inklination zwischen dem vom Parameternetz berechneten und dem wahren Wert.

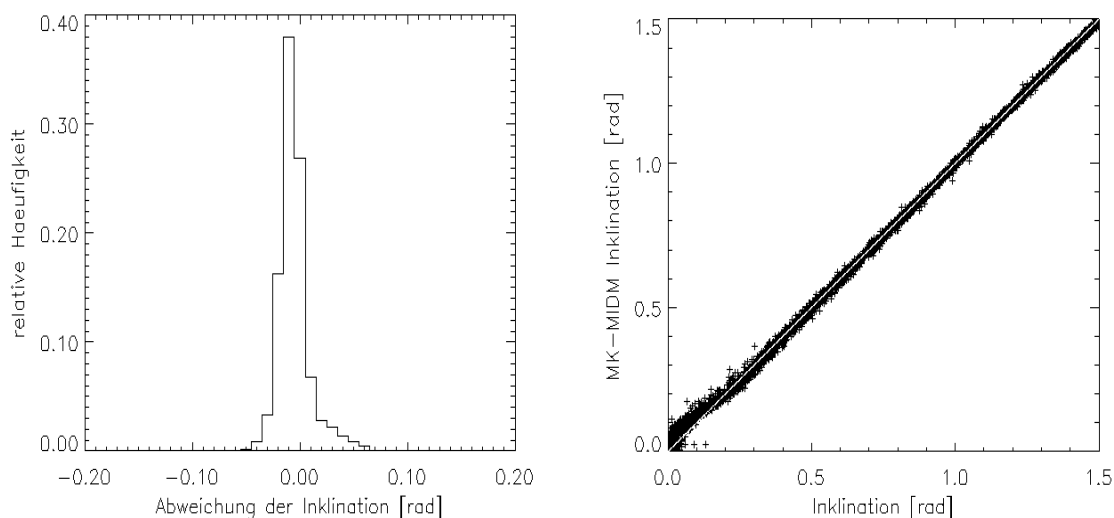


Abbildung 8.15 : Im linken Teil ist die Verteilung der Abweichungen des Inklinationswinkel von den wahren Werten dargestellt. Der rechte Teil zeigt die vom Parameternetz berechneten Werte der Inklination (Ordinate) über die wahren Werte der Inklination (Abzisse).

Diese Ergebnisse zeigen auch hier sehr deutlich die hohe Genauigkeit der, durch das neuronale Netz, berechneten Werte. Bei den 5000 untersuchten Testprofilen wurde eine mittlere Abweichung von weniger als 5% bzw. eine mittleren absoluten Abweichung von 0,012 rad erreicht was einem Wert von weniger als 1° entspricht. Auch die Streuung der Ergebnisse ist mit 0,011 rad wiederum sehr gering. Die schlechteste, vom neuronalen Netz, berechnete Inklination zeigt nur eine Abweichung von 0,079 rad (4,5°) gegenüber dem

wahren Wert. Im rechten Teil der Abbildung 8.15 sind auch hier die Einträge der berechneten Inkliniation durch Kreuze (+) dargestellt. Aufgrund der hohen Anzahl der Testprofile (5000) und dem außerordentlich guten Berechnungsverhalten des neuronalen Netzes sind die einzelnen Kreuze entlang der idealen Gerade (dünne weiße Linie) kaum zu unterscheiden. Diese Darstellung zeigt sehr anschaulich, nochmals die geringe Streuung der Berechneten Werte um die wahren Werte. Nur für kleine Werte der Inkliniation zeigt sich eine geringe Aufweitung der Verteilung. Insgesamt lagen mehr als 94 % der berechneten Ergebnisse für die absolute Abweichung innerhalb der 3-fachen Standardabweichung. Das bedeutet das mehr als 94 % der Ergebnisse einen Fehler aufwiesen der kleiner ist als  $\pm 0,033$  rad bzw.  $\pm 1,89^\circ$ .

Für die 5000 dem neuronalen Netz präsentierten Testprofile ergaben sich bezüglich der berechneten **Doppler-Geschwindigkeiten** folgende Werte für die absolute Abweichung :

Abweichung der Doppler-Geschwindigkeit	in m/s
Mittelwert	11,96
Standardabweichung	9,35
Maximum	70,55
Minimum	0,00
mittlere prozentuale Abweichung	5,65 %

Abbildung 8.16 zeigt die Verteilung der Abweichungen bezüglich der Doppler-Geschwindigkeit zwischen dem vom Parameternetz berechneten und dem wahren Wert.

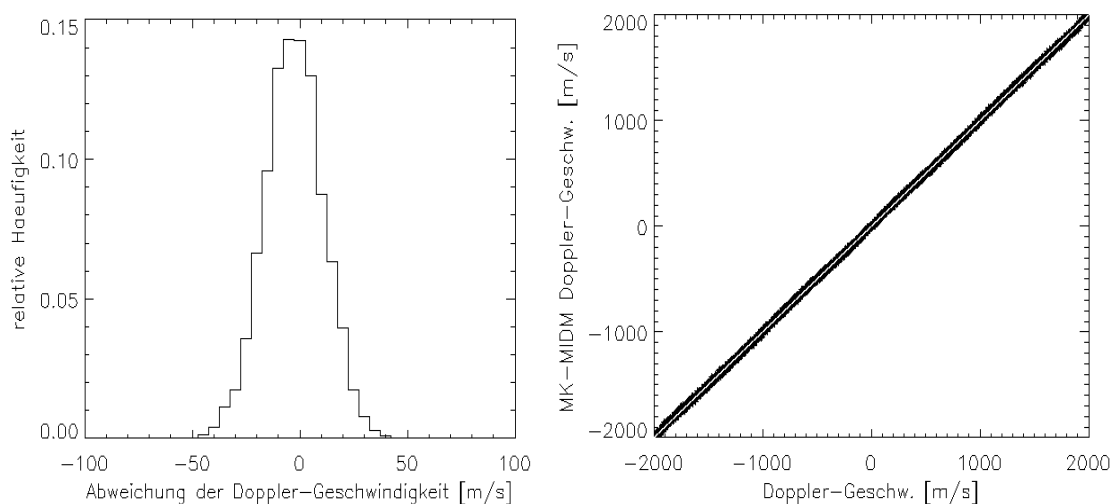


Abbildung 8.16 : Im linken Teil ist wieder die Verteilung der Abweichungen der berechneten von den wahren Werten dargestellt. Der rechte Teil zeigt die vom Parameternetz berechneten Doppler-Geschwindigkeiten (Ordinate) über der wahren Doppler-Geschwindigkeitswerten (Abzisse).

Diese Ergebnisse zeigen auch hier wieder deutlich die hohe Genauigkeit, mit der das neuronale Netz die Inversion durchführt. Bei den 5000 untersuchten Testprofilen wurde eine

mittlere Abweichung von weniger als 6% bzw. einer mittleren absoluten Abweichung von 11,96 m/s erreicht. Auch die Streuung der Ergebnisse ist mit 9,35 m/s ist wiederum sehr gering. Die schlechteste vom neuronalen Netz berechnete Doppler-Geschwindigkeit zeigt eine Abweichung von nur 70,55 m/s gegenüber dem wahren Wert. Im rechten Teil der Abbildung 8.16 sind auch hier die Einträge der berechneten Inklination durch Kreuze (+) dargestellt. Aufgrund der hohen Anzahl der Testprofile (5000) und dem außerordentlich guten Berechnungsverhalten des neuronalen Netzes sind auch hier wieder die einzelnen Kreuze entlang der idealen Gerade (dünne weiße Linie) kaum zu unterscheiden. Diese Darstellung zeigt nochmals sehr anschaulich die geringe Streuung der berechneten Werte um die wahren Werte. Das wird ebenfalls bestätigt dadurch, dass mehr als 96% aller Ergebnisse innerhalb der 3-fachen Standardabweichung liegen. Das bedeutet, dass mehr als 96% der Abweichungen kleiner als  $\pm 28$  m/s sind.

Für die dem neuronalen Netz präsentierten 5000 Testprofile ergaben sich bezüglich der berechneten Mikroturbulenz folgende Werte für die absolute Abweichung :

Abweichung der Mikroturbulenz	in m/s
Mittelwert	21,31
Standardabweichung	22,82
Maximum	180,65
Minimum	0,00
mittlere prozentuale Abweichung	12,01 %

Die Berechnungen für die Mikroturbulenz ergab die in Abbildung 8.17 dargestellte Verteilung der absoluten Abweichungen.

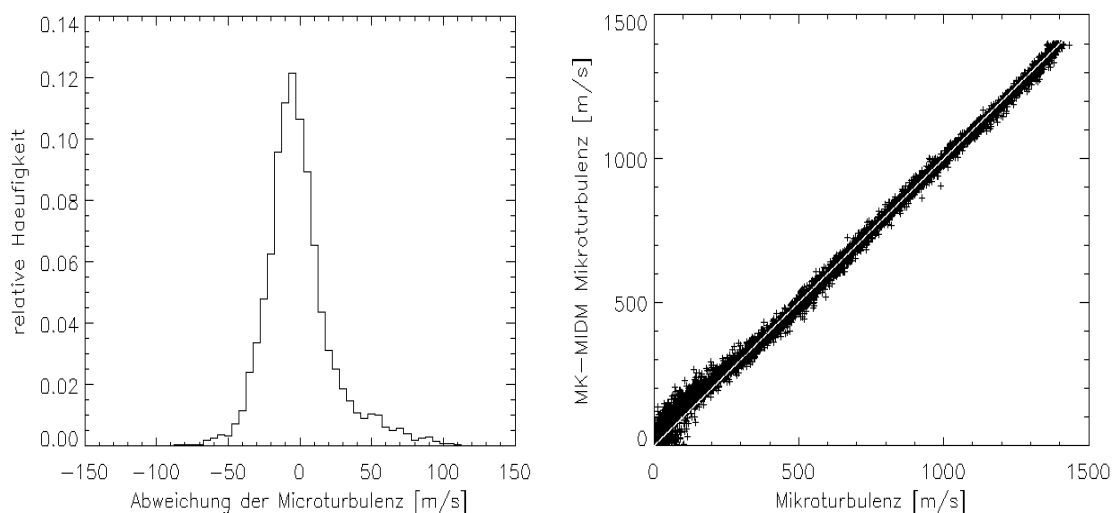


Abbildung 8.17 : Im linken Teil ist wieder die Verteilung der Abweichungen der berechneten von den wahren Werte dargestellt. Der rechte Teil zeigt wiederum die vom Parameternetz berechneten Mikroturbulenzwerte (Ordinate) über die wahren Mikroturbulenzwerte (Abzisse).

Die Ergebnisse sind auch im Fall der Mikroturbulenz wieder sehr gut. Zwar zeigt sich, dass die Mikroturbulenz die schlechteste Vorhersagegenauigkeit gegenüber den anderen drei Parametern besitzt, doch sind die Ergebnisse mit einer mittleren absoluten Abweichung von 21,31 m/s immer noch ausgesprochen gut. Selbst die Streuung der Werte mit 22,82 m/s ist gut. Der mittlere prozentuale Fehler liegt bei 12% und ist damit relativ hoch. Anhand der Darstellung aus Abbildung 8.17 (rechts) ist jedoch ersichtlich, dass die berechneten Werte mit abnehmender Mikroturbulenz einen zunehmenden Fehler erfahren so dass der größte Fehlerbeitrag aus einem Bereich stammt, in dem die Mikroturbulenz kleiner als 200 m/s ist und somit für den relativ großen mittleren prozentualen Fehler von 12,01% sorgt. Die Effekte, die von relativ kleinen Mikroturbulenzwerten durch den Strahlungstransport in die Stokes-Profilen hineingebracht werden, sind äußerst klein und können von anderen Effekten wie der Änderung der Inklination und der Änderungen der Magnetfeldstärke überdeckt werden. Jedoch zeigt sich eine rasche Zunahme der Genauigkeit der Berechnungsergebnisse für Mikroturbulenzen über 200 m/s. Das zeigt sich insbesondere daran, dass mehr als 97% aller 5000 untersuchten Ergebnisse kleiner sind als die 3-fache Standardabweichung bzw. eine kleinere Abweichung als  $\pm 68$  m/s aufweisen.

Wie bei der Klassifikation soll auch hier das Aussageverhalten des neuronalen Netzes bezüglich verrauschter Profildaten untersucht werden. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis S/N beträgt auch hier wieder 100, das bedeutet, dass den Stokes-I- und Stokes-V-Profilverläufen für jeden Wellenlängenpunkt ein normalverteilter Fehler mit einer Standardabweichung von 1/100 der Kontinuumsintensität aufgeprägt wird. Das Aussageverhalten des neuronalen Netzes für 5000 Testdaten mit einem S/N = 100 ist in der folgenden Abbildung für alle vier Parameter, dargestellt. Hierbei stellt sich also die Frage, ob die in den Stokes-Profildaten enthaltene Information durch das Hinzufügen von Rauschen erhalten bleibt. Wieder wurden die Testdatensätze dem Parameternetzwerk präsentiert und für jeden Eingangsvektor (Stokes-I- und Stokes-V-Profilverläufe) wurden simultan die vier zugehörigen Parameter berechnet. Folgende Resultate ergaben sich :

Abweichung der Magnetfeldstärke	in Gauß
Mittelwert	15,84
Standardabweichung	12,36
Maximum	81,58
Minimum	0,00
mittlere prozentuale Abweichung	0,89 %

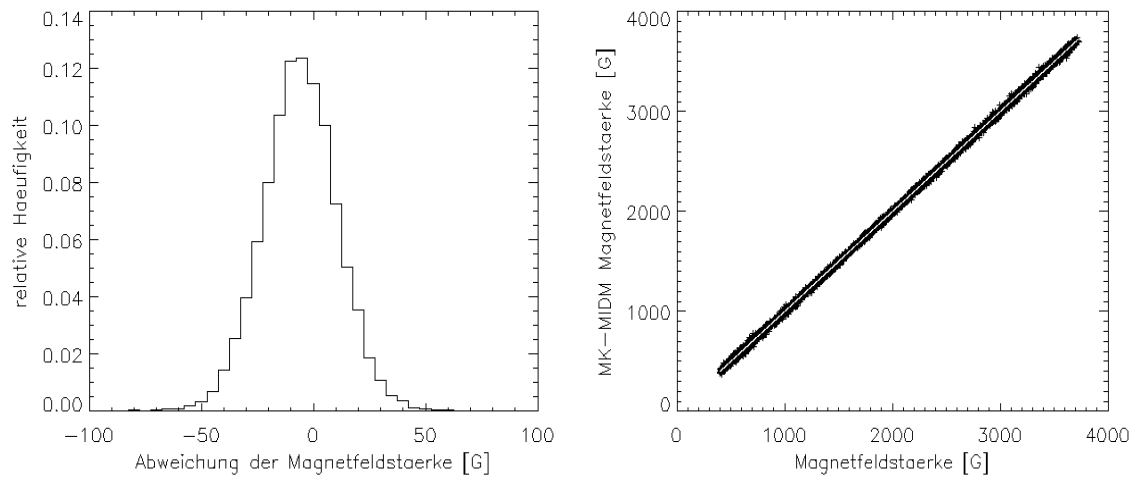


Abbildung 8.18 : Im linken Teil ist die Verteilung der Abweichungen der Magnetfeldstärke von den wahren Werten dargestellt. Der rechte Teil zeigt die vom neuronalen Netz berechnete Magnetfeldstärke (Ordinate) über der wahren Magnetfeldstärke (Abzisse).

Abweichung der Inklination	in rad
Mittelwert	0,016
Standardabweichung	0,019
Maximum	0,102
Minimum	0,000
mittlere prozentuale Abweichung	5,46 %

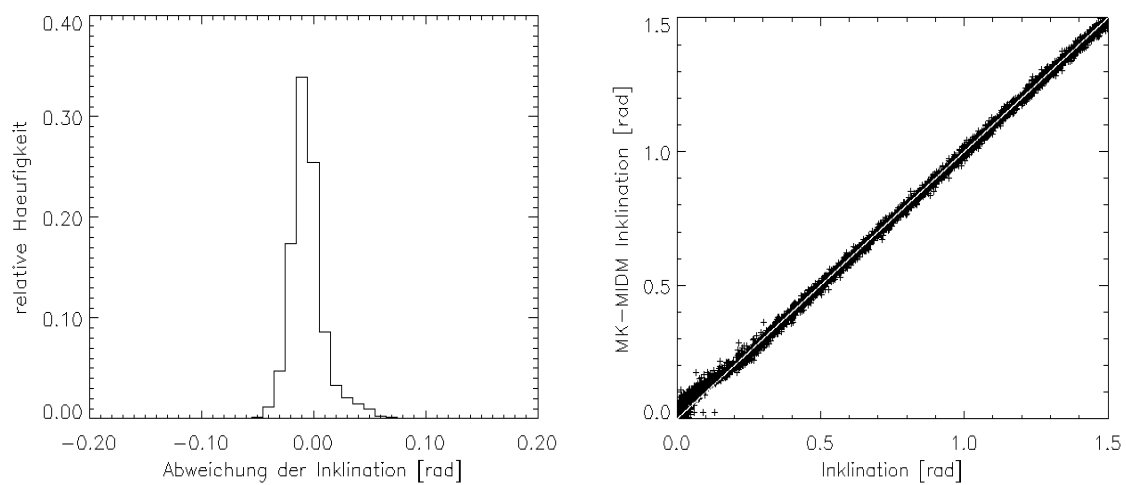


Abbildung 8.19 : Im linken Teil ist die Verteilung der Abweichungen des Inklinationswinkel von den wahren Werten dargestellt. Der rechte Teil zeigt die vom Parameternetz berechneten Werte der Inklination (Ordinate) über die wahren Werte der Inklination (Abzisse).

Abweichung der Doppler-Geschwindigkeit	in m/s
Mittelwert	13,77
Standardabweichung	10,84
Maximum	71,82
Minimum	0,00
mittlere prozentuale Abweichung	6,24 %

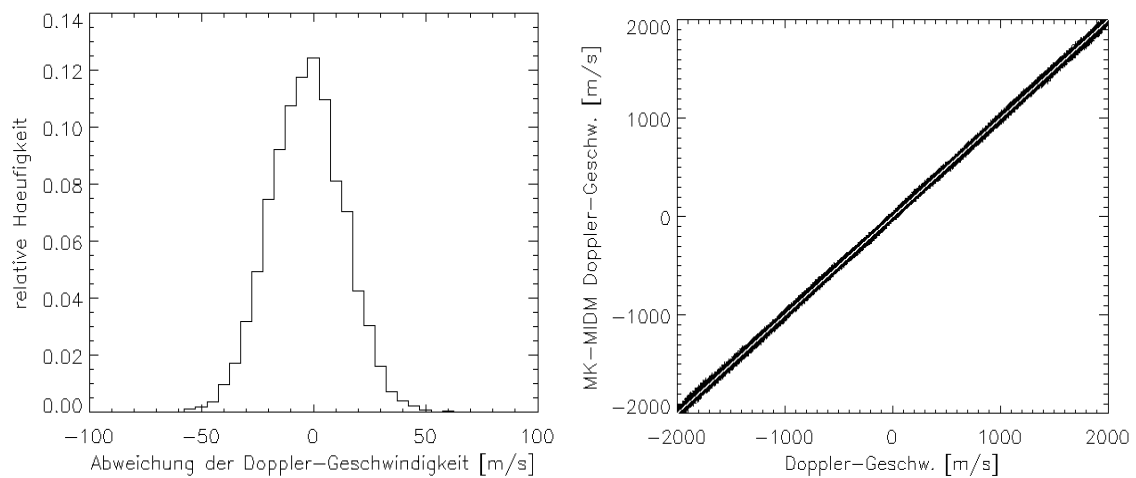


Abbildung 8.20 : Im linken Teil ist wieder die Verteilung der Abweichungen der berechneten von den wahren Werten dargestellt. Der rechte Teil zeigt die vom Parameternetz berechneten Doppler-Geschwindigkeiten (Ordinate) über der wahren Doppler-Geschwindigkeitswerten (Abzisse).

Abweichung der Mikroturbulenz	in m/s
Mittelwert	24,75
Standardabweichung	26,41
Maximum	230,11
Minimum	0,00
mittlere prozentuale Abweichung	18,97 %



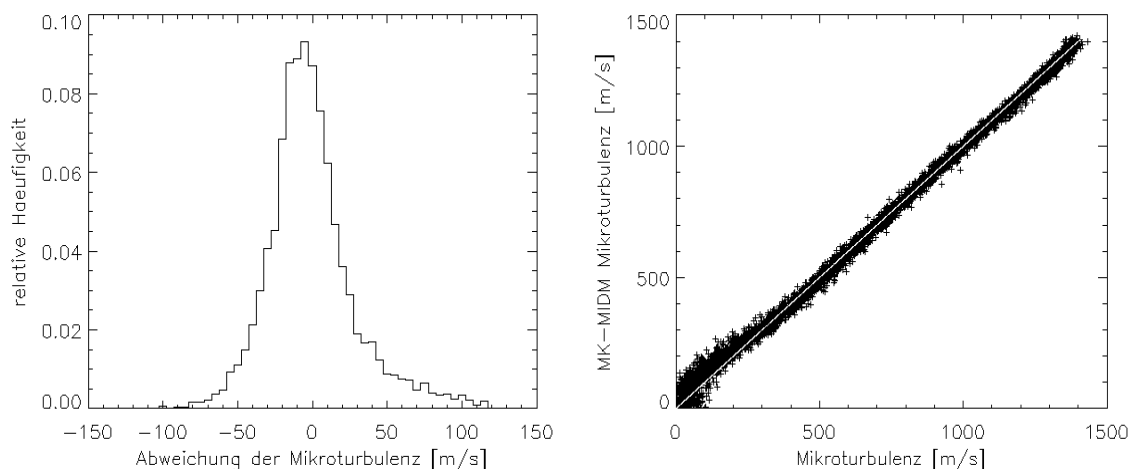


Abbildung 8.21 : Im linken Teil ist wieder die Verteilung der Abweichungen der berechneten von den wahren Werte dargestellt. Der rechte Teil zeigt wiederum die vom Parameternetz berechneten Mikroturbulenzwerte (Ordinate) über die wahren Mikroturbulenzwerte (Abzisse).

Das Parameternetz zeigt sich auch hier sehr robust gegen verrauschte Daten. Die berechneten Werte unterscheiden sich in ihrer Genauigkeit kaum von denen der unverrauschten Profildaten. Das neuronale Netz ist in der Lage, auch bei verrauschten Daten, die Parameterwerte, mit sehr guter Genauigkeit aus den Stokes-I- und Stokes-V-Profilen zu berechnen.

Somit ist die in den Stokes-Profilverläufen enthaltene Information bzw. funktionale Zusammenhang über die zugrundeliegenden atmosphärischen Parameter trotz der verrauschten Daten für das neuronale Netz erkennbar. Die auf dieser Basis durchgeführte Inversion mit neuronalen Netzen ist somit in der Lage, mit großer Genauigkeit die den synthetischen Stokes-Profilverläufen zugrundeliegenden atmosphärischen Parameter zu ermitteln.

### 8.4.4.2 Auswertung des Parameternetzwerks MK-A

Dem neuronalen Netz des Typ MK-A mit der Topologie 122-25-20-4 werden 5000 unbekannte Paare von Stokes-Q- und Stokes-U-Profilen präsentiert. Die folgenden Abbildung zeigt die Verteilung der Abweichungen zwischen den vom Parameternetz berechneten Werten für den azimuthalen Winkel und den wahren Werten. Es soll noch mal darauf hingewiesen werden, dass das Problem der Mehrdeutigkeit des Azimuts hier nicht weiter untersucht wird, die Untersuchungen beziehen sich auf einen Bereich von 0 bis  $\pi$ . Auch hier sind die vom neuronalen Netz berechneten Werte über den wahren Werten aufgetragen, deren Verlauf im Idealfall einer Geraden mit der Steigung eins entspricht (dünne weiße Linie).

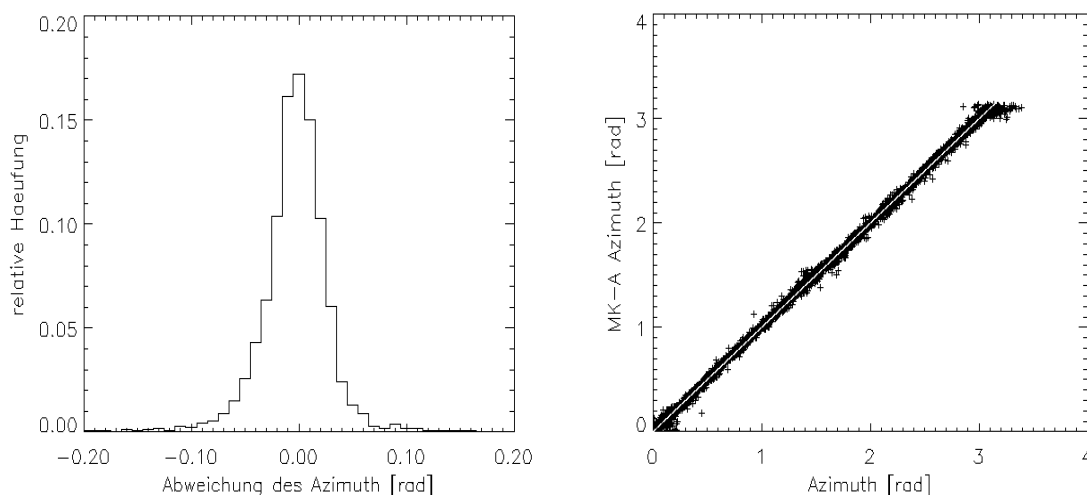


Abbildung 8.22 : Im linken Teil ist die Verteilung der Abweichungen des Azimut vom den wahren Werten dargestellt. Der rechte Teil zeigt die vom neuronalen Netz berechneten Werte des Azimuts (Ordinate) über den wahren Werten des Azimuts (Abzisse).

Aus der Untersuchung der 5000 Testdaten (Stokes-Q und Stokes-U) ergibt sich weiterhin für die absoluten Abweichungen :

Abweichung des Azimuts	in rad
Mittelwert	0,027
Standardabweichung	0,081
Maximum	1,113
Minimum	0,000
mittlere prozentuale Abweichung	8,85 %

Auch dieses neuronale Netz kann unter Ausnutzung der Stokes-Q- und Stokes-U-Profilinginformation gute Ergebnisse liefern. Die mittlere absolute Abweichung beträgt 0,027 rad, das entspricht einem Wert von 1,55°. Auch die Standardabweichung ist mit 0,081 rad bzw. 4,64° gering. Wie auf der rechten Seite der Abbildung 8.19 ersichtlich wird die Berechnungsgenauigkeit des neuronalen Netzes bei einem azimuthalen Winkel, der gegen 0 bzw. gegen  $\pi$  geht, schlechter. Das hat seine Ursache in der Mehrdeutigkeit aufgrund der Gleichung (3.44) des Strahlungstransports für die Stokes-Q- und Stokes-U-Parameter. So erhalten azimuthale Winkel mit einem Wert von  $x$  die gleichen Stokes-Q- und Stokes-U-Profile wie ein Azimutwinkel von  $x+\pi$ . Trotzdem ist auch hier die Aussagegenauigkeit des neuronalen Netzes für Werte über 0° und unter 180° außerordentlich gut, denn nur 0,64 % aller Ergebnisse haben eine Abweichung die größer ist als die 3-fache Standardabweichung, die also mehr als  $\pm 13,75^\circ$  vom wahren Wert abweichen. Somit ist auch hier gezeigt, dass das

neuronale Netz in der Lage ist, mit hoher Genauigkeit den Wert des Azimuts aus den Stokes-Q- und Stokes-U-Profilen zu berechnen.

Wiederum soll das Verhalten des neuronalen Netzes für verrauschte Profildaten untersucht werden. Dabei wird die Testdatenmenge wieder mit einem künstlichen Rauschen überlagert. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis beträgt wiederum 100. Wieder sind die Abweichungen von berechneten zu wahren Wert aufgetragen.

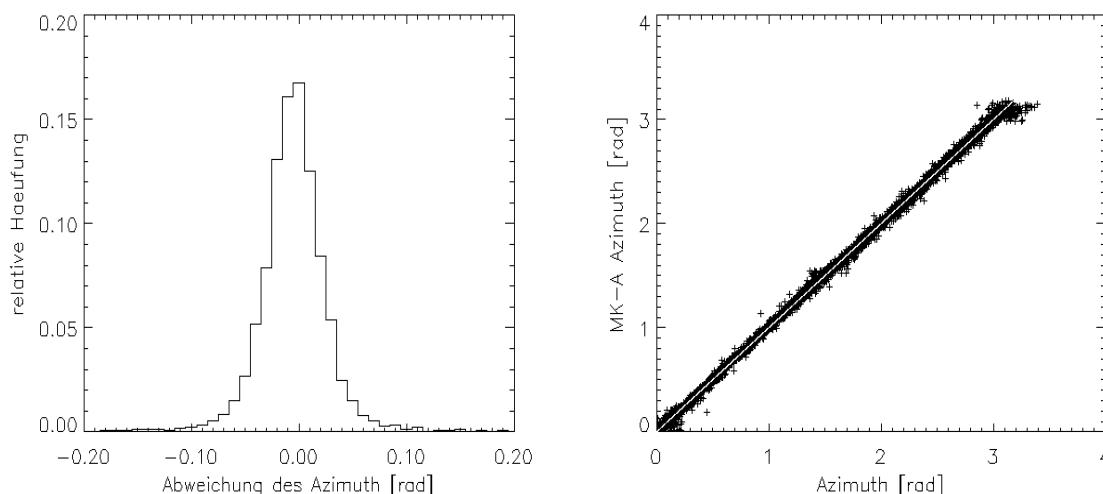


Abbildung 8.23 : Verteilung der Abweichungen von berechneten zu wahren Wert des azimutalen Winkels.

Die Untersuchung der 5000 verrauschten Profildaten ergab dabei folgendes Ergebnis :

Abweichung des Azimuts	in rad
Mittelwert	0,028
Standardabweichung	0,083
Maximum	1,167
Minimum	0,000
mittlere prozentuale Abweichung	9,23 %

Auch hier sind bei den berechneten Ergebnissen nur minimale Änderungen gegenüber den nicht verrauschten Daten zu erkennen. Auch in diesem Fall ist das neuronale Netz robust gegenüber verrauschten Daten. Das Parameternetz ist somit in der Lage, aus den Stokes-Q- und Stokes-U-Profilen, aufgrund der im Trainingsprozess erlernten funktionalen Abhängigkeit den azimutalen Winkel mit guter Genauigkeit zu bestimmen.

## 8.5 Aussageverhalten für Gradienten

Die den Parameternetzwerke zugrundegelegte planparallele Atmosphäre für das Training, ist zwar in Bezug auf Temperatur und Druck geschichtete gewesen, jedoch wurden die Parameter Magnetfeldstärke, Inklination, Azimut, Doppler-Geschwindigkeiten oder Mikroturbulenz als konstant innerhalb der Atmosphäre betrachtet. Diese besitzen also keine Abhängigkeit von der optischen Tiefe  $\tau$ . Die Parameternetzwerke sind somit auch nur in der Lage konstante Werte für die jeweiligen Parameter zu liefern. Realistische Annahmen über die Verhältnisse in der Photosphäre gehen aber von mehr oder weniger starken Gradienten für die jeweiligen Parameter aus so dass sich die Frage stellt, von welcher Art die Information ist, die die neuronalen Netze unter realistischen Bedingungen liefern. Verschieden „ältere“ Inversionsroutinen wie z.B. die von Auer, Heasley und House (1977) oder die von Skumanich und Lites (1987) vorgestellten Inversionsprogramme arbeiten auf der Basis der analytischen Lösung des polarisierten Strahlungstransports und liefern somit ebenfalls nur Aussagen bezüglich einer homogen geschichteten Atmosphäre.

Eine Interpretation der Aussageergebnisse der von Skumanich und Lites vorgestellten Inversionsroutine, wurde von Westendorp Plaza, del Toro Iniesta, Ruiz Cobo und Matinez Pillet (1998) vorgeschlagen und beruht auf dem Konzept der Entstehungshöhe von Sanchez Almeida et. al. (1996). Dieser berechnet auf der Grundlage der generalisierten Response-Funktionen die Entstehungshöhen - in Abhängigkeit der jeweiligen Linie - für einen zu messenden bzw. abzuleitenden atmosphärischen Parameter. Dabei wird eine Art gewichtete Response-Funktion benutzt, um den Ort in der optischen Tiefe festzulegen, wo das Stokes-Spektrum am meisten auf kleine Änderungen des jeweiligen Parameters reagiert, also dort wo die Response-Funktion des untersuchten Parameters am größten ist. Dabei wird der von Sanchez Almeida (1996) hergeleitete Ausdruck :

$$\tau_{im} = f^{-1} \left[ \frac{\int_0^{\infty} f(\tau) R_{im}(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} R_{im}(\tau') d\tau'} \right], \quad (8.14)$$

benutzt, den er als „height of formation“ (HOF) bezeichnet. Dabei bezeichnet der Index  $i$  den jeweiligen Stokes-Parameter, der Index  $m$  den zu untersuchenden Parameter, und die Funktion  $f$  bezeichnet eine von der optischen Tiefe  $\tau$  abhängigen Skalierung, im allgemeinen den Logarithmus der optischen Tiefe. Die Untersuchungen von Westendorp Plaza, del Toro Iniesta, Ruiz Cobo und Matinez Pillet zeigten nun, dass die Werte, die die Inversionsroutine von Skumanich und Lites erzielte, sehr gut die Werte repräsentierten, die bei der durch (8.14) berechneten optischen Tiefe für die jeweiligen Parameter vorherrschten. Also gaben die berechneten Parameter Informationen aus den Bereichen der optischen Tiefe, in denen ihr Einfluss auf das entstehende Stokes-Spektrum am größten ist.

Wenn nun die Entstehungshöhe durch den Logarithmus der optischen Tiefe bestimmt wird, lässt sich die Gleichung (8.14) sehr einfach als Schwerpunkt der Response-Funktionen für den jeweilige atmosphärischen Parameter interpretieren :

$$\bar{f}_{im}(\tau_c) = \frac{\int_0^{\infty} f(\tau_c) R_{im}(\tau_c) d\tau_c}{\int_0^{\infty} R_{im}(\tau'_c) d\tau'_c} . \quad (8.15)$$

Gleichung (8.15) wurde in das modifizierte Strahlungstransportprogramm DIAMAG implementiert und berechnet. In diesem wurden bereits die in Kapitel 5 hergeleiteten und berechneten Response-Funktionen implementiert. Eine genaue Beschreibung der Modifikation des Strahlungstransportprogramms erfolgt in Kapitel 9.

Die Ergebnisse der neuronalen Netze wurden nun bezüglich der Gleichung (8.15) untersucht. Dabei wurden verschiedene Atmosphären mit linearen Gradienten in der Magnetfeldstärke, der Inklination und des Azimuts erzeugt und auf dieser Grundlage zum einen die Entstehungshöhen gemäß (8.15) berechnet und zum anderen die entsprechenden Stokes-Profile erzeugt. Die Stokes-Profile wurden dann den Klassifikationsnetzwerken vorgestellt. Diese zeigten bei den ersten Untersuchungen weiterhin sehr gute Klassifikationsergebnisse, trotz der Gradienten. Anschließend wurden die jeweiligen Parameternetzwerke ausgewählt, und anhand der Stokes-Profile wurden die atmosphärischen Parameter berechnet. Diese wurden mit den Ergebnissen der Berechnungen von (8.15) verglichen. Die Response-Funktionen der jeweiligen Parameter wurden dabei unter den atmosphärischen Gradienten berechnet. Die bisher untersuchten Ergebnisse zeigen, dass die durch die neuronalen Netze berechneten Parameterwerte im Rahmen von  $\log(\tau) = \pm 0,5$  um den durch (8.15) berechneten Wert liegen. Damit stammen die durch die neuronalen Netze gemachten Aussagen über die einzelnen Parameter aus den Bereichen der optischen Tiefe, wo die Response-Funktionen ihre größten Werte haben bzw. von dort, wo die jeweiligen Parameter ihren größten Einfluss auf das Stokes-Spektrum haben. Ausgedrückt in der Definition von Sanches Almeida (1996) bedeutet dies, dass die Aussagen der neuronalen Netze für die einzelnen Parameter in der Nähe der Entstehungshöhen liegen.

Die somit erzielten guten „Durchschnittswerte“ für die jeweiligen atmosphärischen Parameter dienen dann als Ausgangspunkt bzw. Startwerte für die im nächsten Kapitel beschriebene Inversion auf der Basis von Response-Funktionen.

## 9 Die Inversion auf der Basis von Response-Funktionen

Der herkömmliche Ansatz zur Interpretation und Analyse von Stokes-Linienprofilen liegt in der Anpassung des theoretischen Modells des Strahlungstransports an die gemessenen Daten. Dabei ist die Genauigkeit des zur Anpassung benutzten theoretischen Modells von entscheidender Bedeutung für die zu erzielenden Ergebnisse. In den vergangenen 20 Jahren wurden die Modelle, die zur Inversion benutzt wurden, zunehmend verbessert. Ausgehend von der Inversionsroutine von Auer, Heasley und House (1977), die ihre Modellberechnungen auf der Grundlage der Lösung von Unno (1956) aufbauten, wurde von Landolfi, Landi Degl'Innocenti und Arena (1984) und später auch von Skumanich und Lites (1987) eine Inversion auf Basis der Lösung von Rachkovsky (1962) durchgeführt. All den genannten Inversionsmethoden ist gemeinsam, dass sie auf den analytische Lösungen des polarisierten Strahlungstransports beruhen. Das hat seine Ursachen in den, für die iterative Anpassung benutzten partiellen Ableitungen nach den jeweils gesuchten Parametern. Diese werden benötigt, um den Gradienten und eventuelle Informationen zweiter Ordnung der Zielfunktion  $\chi^2$  (4.1) zu berechnen. Die numerische Berechnung der jeweiligen partiellen Ableitungen bedeutet die zusätzliche Integration der Strahlungstransportgleichung für jeden freien Parameter und für jeden Integrationspunkt der optischen Tiefe. Dies wäre bei dem ohnehin schon großen rechnerischen Aufwand der Inversion nicht mehr vertretbar. Eine analytische Lösung des polarisierten Strahlungstransports lässt sich auf der Grundlage des Milne-Eddington-Modells berechnen. Jedoch ist ein erheblicher Nachteil des Milne-Eddington-Modells, dass zum einen die Absorptionsmatrix unabhängig von der Höhe bzw. optischen Tiefe ist und zum anderen die Quellfunktion, d.h. die Planck-Funktion im LTE-Fall, eine lineare Abhängigkeit von der optischen Tiefe besitzt. Eine konstante Absorptionsmatrix hat zur Folge, dass alle Parameter der Absorptionsmatrix, wie z.B. Magnetfeldstärke und dessen Ausrichtung, Doppler-Geschwindigkeiten und Mikroturbulenz, als konstant innerhalb der Atmosphäre angenommen werden müssen. Dies entspricht offensichtlich nicht den wirklichen Verhältnissen in der Photosphäre (del Toro Iniesta & Ruiz Cobo 1996).

Aufbauend auf den Response-Funktionen für den polarisierten Strahlungstransport (Degl'Innocenti und Degl'Innocenti 1977) konnten Ruiz Cobo und del Toro Iniesta (1992) zeigen, dass sich die Response-Funktionen für die Stokes-Parameter wie die partiellen Ableitungen der Stokes-Parameter nach den gesuchten atmosphärischen Parametern verhalten. Darauf aufbauend stellten Ruiz Cobo und Del Toro Iniesta (1992) ihre Inversionsroutine, basierend auf Response-Funktionen, vor. Diese arbeitet auf der Grundlage der wesentlich genaueren und realistischeren numerischen Lösung des Strahlungstransports. Damit ist die Inversionsroutine in der Lage, mit nur geringen Mehraufwand bei jeder Integration der Strahlungstransportgleichung die benötigten Response-Funktionen für alle

freien Parameter und für jeden Integrationspunkt entlang der optischen Tiefe zu berechnen. Damit ließen sich erstmals direkt aus dem Modell die Gradienten für verschiedene atmosphärische Parameter berechnen, wie z.B. Temperatur, Magnetfeldstärke, Dopplergeschwindigkeit, Mikroturbulenz und Makroturbulenz. Genau dieser Ansatz wird im folgenden benutzt, um den Gradienten des Magnetfeldvektors aus den Stokes-Profilaten zu bestimmen.

## 9.1 Response-Funktionen als partielle Ableitung der Zielfunktion $\chi^2$

Hier soll nun der in Kapitel 4 vorgestellte Levenberg-Marquardt-Algorithmus in Beziehung mit den in Kapitel 5 beschriebenen Response-Funktionen für die Stokes-Parameter gebracht werden. Im konkreten Fall der Messung der Stokes-Parameter  $I_k^{obs}$  und der Anpassung an das theoretische Modell der berechneten Stokes-Parameter  $I_k^{syn}$  kann das Zielfunktional (4.1) geschrieben werden als

$$\chi^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^n \left( \frac{I_k^{obs}(\lambda_i) - I_k^{syn}(\lambda_i, a_1, \dots, a_m)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (9.1)$$

Die  $a_1$  bis  $a_m$  bezeichnen dabei die freien Parameter des Modells, der Index  $k$  bezeichnet einen der vier Stokes-Parameter (I,Q,U,V), und  $\nu$  ist ein zusätzliches statistisches Gewicht und berechnet sich aus der Differenz der zur Verfügung stehenden Wellenlängenpunkte  $n$  und der Anzahl der zu bestimmenden freien Parameter  $m$ . Für eine kleine Veränderung  $\delta I_k$  der Modellfunktion der Stokes-Parameter lässt sich die Veränderung der Zielfunktion (9.1)  $\delta\chi^2$  in erster Ordnung schreiben als

$$\delta\chi^2 = \frac{2}{\nu} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^n \left( \frac{I_k^{obs}(\lambda_i) - I_k^{syn}(\lambda_i, a_1, \dots, a_m)}{\sigma_i} \right) \delta I_k^{syn}(\lambda_i, a_1, \dots, a_m). \quad (9.2)$$

Andererseits kann nach Gleichung (5.8) die Veränderung des Stokes-Parameter  $\delta I_k$  aufgrund der einer kleinen Veränderung der Parameter  $\delta a_j$  geschrieben werden als

$$\delta I_k(0) = \sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} R_{kj}(\lambda_i, \tau) \delta a_j(\tau) d\tau. \quad (9.3)$$

Im Falle einer diskreten Berechnung des Integrals in Gleichung (9.3) über  $z$  Integrationspunkte lässt sich diese mit Hilfe der Quadraturformel schreiben als

$$\delta I_k(0) = \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^z w_s R_{kj}(\lambda_i, \tau_s) \delta a_{js} \Delta\tau. \quad (9.4)$$

Dabei ist  $w_s$  das Integrationsgewicht der Quadratur. Unter der üblichen Annahme einer gleichmäßigen Darstellung der Integrationspunkte im Logarithmus der optischen Tiefe, lässt sich die einfache Substitution  $d\tau = \tau \ln(10) d\log(\tau)$  anwenden, und Gleichung (9.4) kann somit geschrieben werden als

$$\delta I_k(0) = \Delta \log(\tau) \ln(10) \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^z w_s R_{kj}(\lambda_i, \tau_s) \delta a_{js} . \quad (9.5)$$

Dabei ist  $\Delta \log(\tau)$  vor die Summe gezogen worden, weil es sich um gleichmäßige Intervalle der Integrationspunkte entlang der Tiefenskala handelt.

Mit der Gleichung (9.5) kann nun Gleichung (9.2) geschrieben werden als

$$\delta \chi^2 = \frac{2}{v} \Delta \log(\tau) \ln(10) \sum_{s=1}^z \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^n \left( \frac{I_k^{obs}(\lambda_i) - I_k^{syn}(\lambda_i, a_j)}{\sigma_i} \right) w_s \tau_s R_{kj}(\lambda_i, \tau_s) \right\} \delta a_{js} \quad (9.6)$$

Damit ist die Variation der Zielfunktion (9.1) in erster Ordnung beschrieben durch die Variation des Parameters  $\delta a_{js}$ . Somit entsprechen die Response-Funktionen  $R_{kj}$  bis auf einige Vorfaktoren den partiellen Ableitungen nach den freien Parametern. Gleichung (4.8) zur Berechnung des neuen Iterationsschrittes, innerhalb des Levenberg-Marquardt-Algorithmus, lässt sich dann schreiben als

$$\delta \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \nabla \chi^2 . \quad (9.7)$$

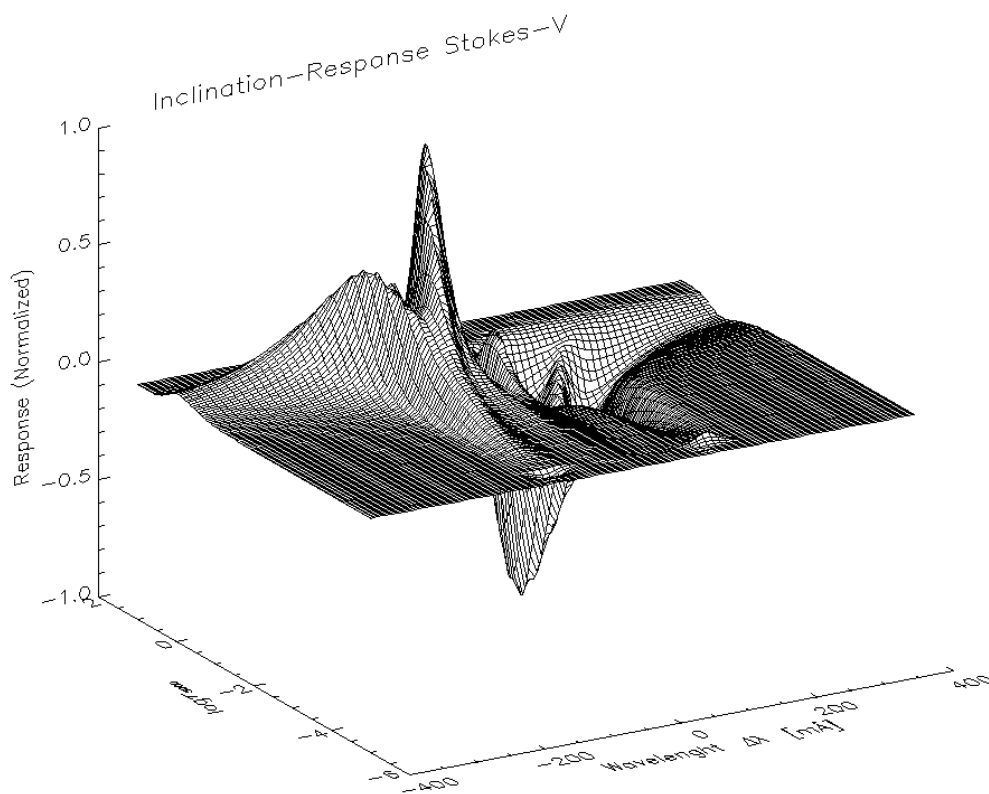
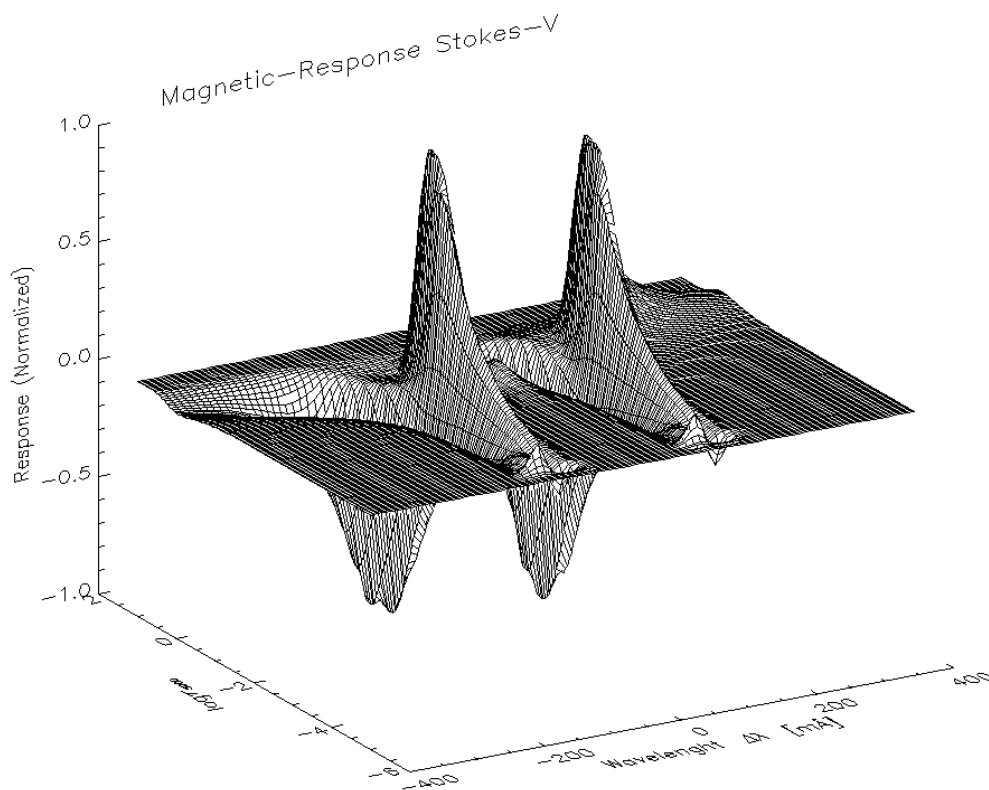
Der Gradient der Zielfunktion ist unmittelbar aus Gleichung (9.6) zu ersehen, und die quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  enthält, wie in Kapitel 4 beschrieben, die Produkte der ersten Ableitungen und entspricht somit der approximierten Hessematrix der Zielfunktion. Damit lassen sich alle partiellen Ableitungen, die für den Levenberg-Marquardt-Algorithmus benötigt werden, aus den jeweiligen Response-Funktionen berechnen.

## 9.2 Bestimmung des Gradienten des Magnetfeldvektors

Die Response-Funktionen, als partielle Ableitungen nach den Magnetfeldvektorparametern zeigen die Empfindlichkeit des Stokes-Spektrums für eine bestimmte Wellenlänge und für eine bestimmte optische Tiefe an. Mit Ihnen lässt sich unmittelbar erkennen, in welchen Wellenlängenbereichen und in welchen Höhen der Sonnenatmosphäre die untersuchte Absorptionslinie auf Veränderungen des jeweiligen atmosphärischen Parameter reagiert. Somit bilden Response-Funktionen ein ausgezeichnetes diagnostisches Werkzeug für die Untersuchung von Absorptionslinien und der Atmosphäre.

In der folgenden Abbildungen sind beispielhaft drei Response-Funktionen des Stokes-V-Parameter für die Magnetfeldstärke, die Inklination und des Azimuts berechnet.





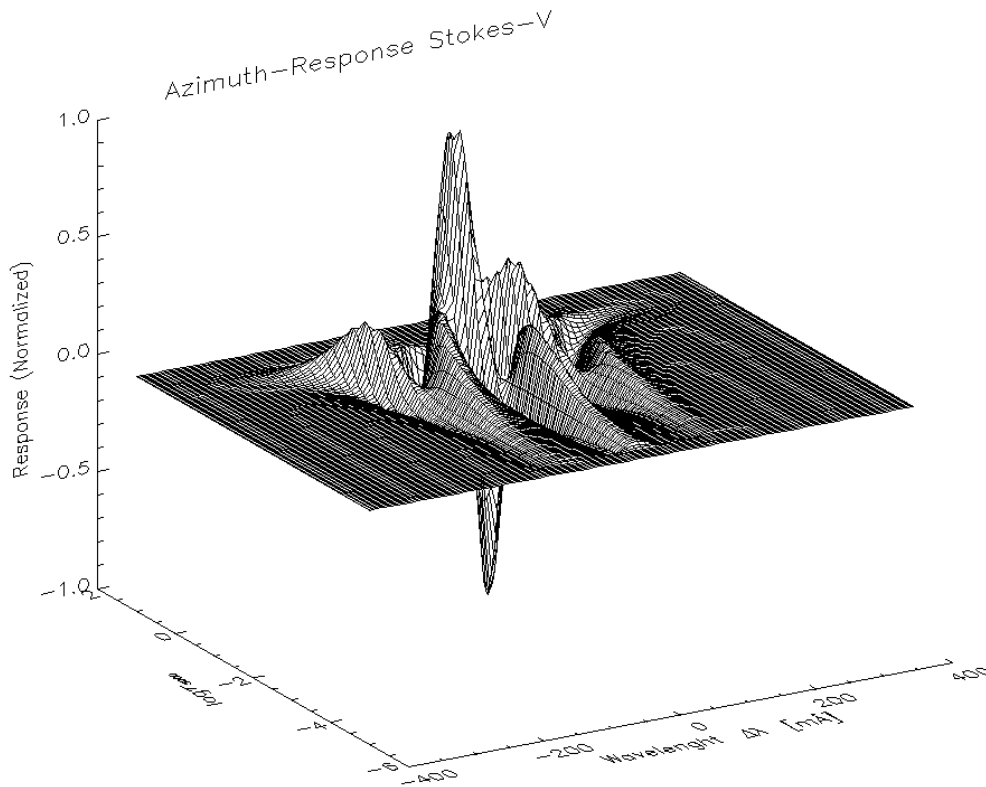


Abbildung 9.1 : Darstellung der berechneten Response-Funktionen des Stokes-V-Parameter für die Magnetfeldstärke, die Inklination und den Azimutwinkel. Dabei ist der Response (z-Achse) – Größe der partiellen Ableitung des Stokes-V-Parameter - über der Wellenlänge (x-Achse) und über der optischen Tiefe (y-Achse) angegeben. Die Response-Funktionen sind jeweils auf eins normiert.

Die Berechnung erfolgte anhand der in Kapitel 5 ausgearbeiteten Gleichungen und deren Implementation in das Strahlungstransportprogramm DIAMAG.

Die Bestimmung des Gradienten der Magnetfeldstärke, der Inklination sowie des Azimuts, soll in dieser Arbeit in erster Ordnung durchgeführt werden, d.h. es werden lineare Steigungen des Magnetfeldvektors durch das Inversionsprogramm berechnet. Dies hat seine Ursache darin, dass in dieser Arbeit nur eine Absorptionslinie (FeI 6302,5 Å) für die Inversion betrachtet wird und die Sensibilität - Amplitude der Response-Funktion - dieser Linie auf Magnetfeldstärke-, Inklinations- sowie Azimutänderungen nur in einen Bereich zwischen  $\log(\tau) = 0 > x > \log(\tau) = -3$  signifikante Werte aufweist. In diesem schmalen Bereich von ca. 200 km wird keine wesentliche Abweichung von einem linearen Gradienten für die Magnetfeldparameter erwartet (Collados et. al. 1994). Die in Abbildung 9.1 dargestellten Response-Funktionen zeigen ebenfalls deutlich die begrenzten Bereiche, in denen die Response-Funktionen signifikante Werte aufweisen. Damit ist der Einfluss der zu untersuchenden Magnetfeldparameter auf das entstehende Stokes-Spektrum, auf einen relativ kleinen Bereich innerhalb der optischen Tiefe begrenzt.

Um zum einen die freien Parameter für die Inversion einzuschränken und zum anderen eine ausreichende Zahl zur Berechnung des linearen Gradienten zu ermöglichen, werden an zwei zu bestimmenden Punkten entlang der optischen Tiefe die Magnetfeldparameter durch das

Inversionsprogramm bestimmt. Der Gradient wird anschließend durch eine lineare Interpolation durch diese Stützpunkte bestimmt. Die Ermittlung der Stützpunkte soll nach einem Konzept berechnet werden, das Staude (1972) bereits für die Beitragsfunktionen der Linienintensität vorgeschlagen hat. Diese werden dabei als Wahrscheinlichkeitsdichten für die jeweiligen Beiträge zur Linienintensität entlang der optischen Tiefe interpretiert. Daraus können dann die Momente der Wahrscheinlichkeiten berechnet werden (Staude 1996) und Aussagen über Mittelwerte und Beitragsbereiche erhalten werden. Ausgehend von dieser Idee sollen die Response-Funktionen ihrerseits als Wahrscheinlichkeitsdichten bezüglich der Empfindlichkeit entlang der optischen Tiefe interpretiert werden. Diese geben dann die Wahrscheinlichkeit in der optischen Tiefe an, in denen eine kleine Variation eines Parameters Auswirkungen auf das entstehende Stokes-Spektrum hat. Der Ausdruck für den Erwartungswert ist mit Hilfe der normierten Response-Funktion - der Wahrscheinlichkeitsdichte - gegeben durch

$$\bar{f}_{im}(\tau_c) = \frac{\int_0^{\infty} f(\tau_c) R_{im}(\tau_c) d\tau_c}{\int_0^{\infty} R_{im}(\tau'_c) d\tau'_c}, \quad (9.8)$$

und entspricht somit der von Sanchez Almeida et. al. (1996) definierten Gleichung (8.15). Dieser Ausdruck soll dazu genutzt werden, den mittleren Ort in der optischen Tiefe anzuzeigen, in denen die jeweiligen Parameter ihren größten Einfluss auf das Stokes-Spektrum ausüben. Der Index  $i$  bezeichnet dabei wiederum den Stokes-Parameter und der Index  $m$  den zu untersuchenden Parameter. Ausgehend von der Varianz

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (f(\tau_c) - \bar{f}(\tau_c))^2 R_{im} d\tau_c, \quad (9.9)$$

lässt sich dann die Information über die Ausdehnung des Bereiches gewinnen, der den meisten Einfluss auf das entstehende Stokes-Spektrum hat. Ausgehend von dem interpretierten Mittelwert (9.8) sollen die Stützpunkte in positiver und negativer Richtung der optischen Tiefe über die Standardabweichung gemäß der Wurzel aus Gleichung (9.9) berechnet werden. Diese Berechnungen wurden wiederum in das Strahlungstransportprogramm DIAMAG implementiert.

### 9.3 Die numerische Implementation

Ausgangspunkt für die Implementation des Inversionsprogramms ist das Strahlungstransportprogramm DIAMAG des Kiepenheuer Instituts für Sonnenphysik. Dieses Programm berechnet auf der Grundlage der Diagonal-Lambda-Operator-Methode (DELO-Methode) von Rees, Murphy und Durrant (1989) die einzelnen Stokes-Parameter und die

jeweiligen Profilverläufe über der Wellenlänge. Die aus Kapitel 5 berechneten Response-Funktionen des vollständigen Stokes-Vektor für die Magnetfeldstärke, die Inklination und den Azimut wurden in FORTRAN programmiert und in mehreren Funktionen als zusätzliches Modul (Common-Block) dem Programm DIAMAG bereitgestellt. Die Berechnungsaufrufe der implementierten Funktionen wurden in die Integrationsroutine des Diagonal-Lambda-Verfahren eingefügt, um gemäss der Gleichung (5.7) den Response-Vektor für jede Wellenlänge und jedes Intervall in der optischen Tiefe zu berechnen. Zu der ansonsten analytischen Berechnung der Response-Funktionen wird der numerisch berechnete, in Kapitel 3 vorgestellte Evolutions-Operator multipliziert (siehe Anhang). Dieser kann für jeden Integrationspunkt in der optischen Tiefe unmittelbar aus dem Diagonal-Lambda-Operator berechnet werden (Rees, Murphy und Durrant 1989). Durch die Integration der Strahlungstransportgleichung wird zu jedem Stokes-Profilverlauf simultan die Response-Funktionen der drei Magnetfeldparameter über die Wellenlänge und der optischen Tiefe mitberechnet.

Anschließend wurde der Levenberg-Marquardt-Algorithmus gemäss der Herleitung aus Kapitel 4 in der Programmiersprache IDL implementiert. Als Modellfunktion dient das modifizierte Strahlungstransportprogramm DIAMAG, das über Systemaufrufe aus IDL aufgerufen wird. Die Response-Funktionen dienen dann entsprechend der Gleichung (9.7) als Gradient bzw. werden zur approximierten Hessematrix der Zielfunktion (9.1) zusammengestellt. Die freien Parameter bzw. die zu ermittelnden Parameter der Inversion sind die Magnetfeldstärke, die Inklination und der Azimut. Diese drei Parameterwerte werden jeweils an den beiden Stützpunkten gemäß der Gleichungen (8.15) und (9.8) in der optischen Tiefe ermittelt. So ist die Gesamtzahl der freien Parameter der Inversionsrechnung auf sechs beschränkt. Der Levenberg-Marquardt-Algorithmus bzw. das Inversionsprogramm ist mit den neuronalen Netzen gekoppelt. Diese liegen als C-Programme vor und sind in den IDL-Code des Inversionsprogramm mit eingebunden. So liefert der Aufruf des neuronalen Netzes die Initialisierungsparameter des Levenberg-Marquardt-Algorithmus. Das Inversionsprogramm arbeitet mit der Information aller vier Stokes-Parameter, die jeweils in den Bereichen von  $-300 \text{ m\AA}$  bis  $+300 \text{ m\AA}$  um das Linienzentrum in Abständen von  $10 \text{ m\AA}$  angegeben sind.

## 9.4 Ergebnisse und Bewertung

Im folgenden sind verschiedene Stokes-Profildaten mit unterschiedlichen Gradienten erzeugt worden. Nachdem die künstlichen neuronalen Netze bereits eine Klassifikation der Modellatmosphäre und damit die wahrscheinlichste Temperatur- und Druckschichtung bestimmt haben, wird das entsprechende Parameternetzwerk gestartet. Diese lieferten entsprechend den Untersuchungen aus Abschnitt 8.5 außerordentlich gute durchschnittliche Parameterwerte. Die durch das Parameternetzwerk gelieferten Werte für die Magnetfeldstärke, Inklination und Azimut dienen dann als Startwerte für den Levenberg-Marquardt-Algorithmus. Das Inversionsprogramm berechnet anhand der Startwerte den Gradienten der drei Magnetfeldparameter. Das Abbruchkriterium ist durch Eingabe eines Toleranzwertes für die Zielfunktion  $\chi^2$  gegeben. Im folgenden sind einige Beispiele der

Berechnungsergebnisse dargestellt. Dabei wurde jeweils ein Gradient mit linearer Schichtung für die Magnetfeldstärke, die Inklination und den Azimut vorgegeben. Die Parameter für die Doppler-Geschwindigkeit sowie für die Mikroturbulenz wurden für diese Untersuchungen auf jeweils +300 m/s festgehalten. Als Modellatmosphäre ( $T(\tau)$ ,  $p(\tau)$ ) wurde die bereits beschriebene semiempirische Atmosphäre von Maltby MK benutzt. Auf der Grundlage dieser atmosphärischen Parameter wurden die jeweiligen Stokes-Profile erzeugt und zuerst den neuronalen Netzen präsentiert. Die Klassifikation zeigte weiterhin außerordentlich gute Ergebnisse, so dass die Gradienten in den Magnetfeldparametern die Aussageergebnisse der Klassifikationsnetze nicht beeinträchtigen. In den folgenden Abbildungen 9.2 und 9.3 sind einige Berechnungsergebnisse des Inversionsprogramms dargestellt. Die horizontalen Punkt-Strichlinien zeigen die Werte, die durch das neuronale Netz berechnet wurde. Die durchgezogenen Linien zeigen den vorgegebenen Gradienten und die gestrichelten Linien zeigen die durch das Inversionsprogramm berechneten Gradienten.

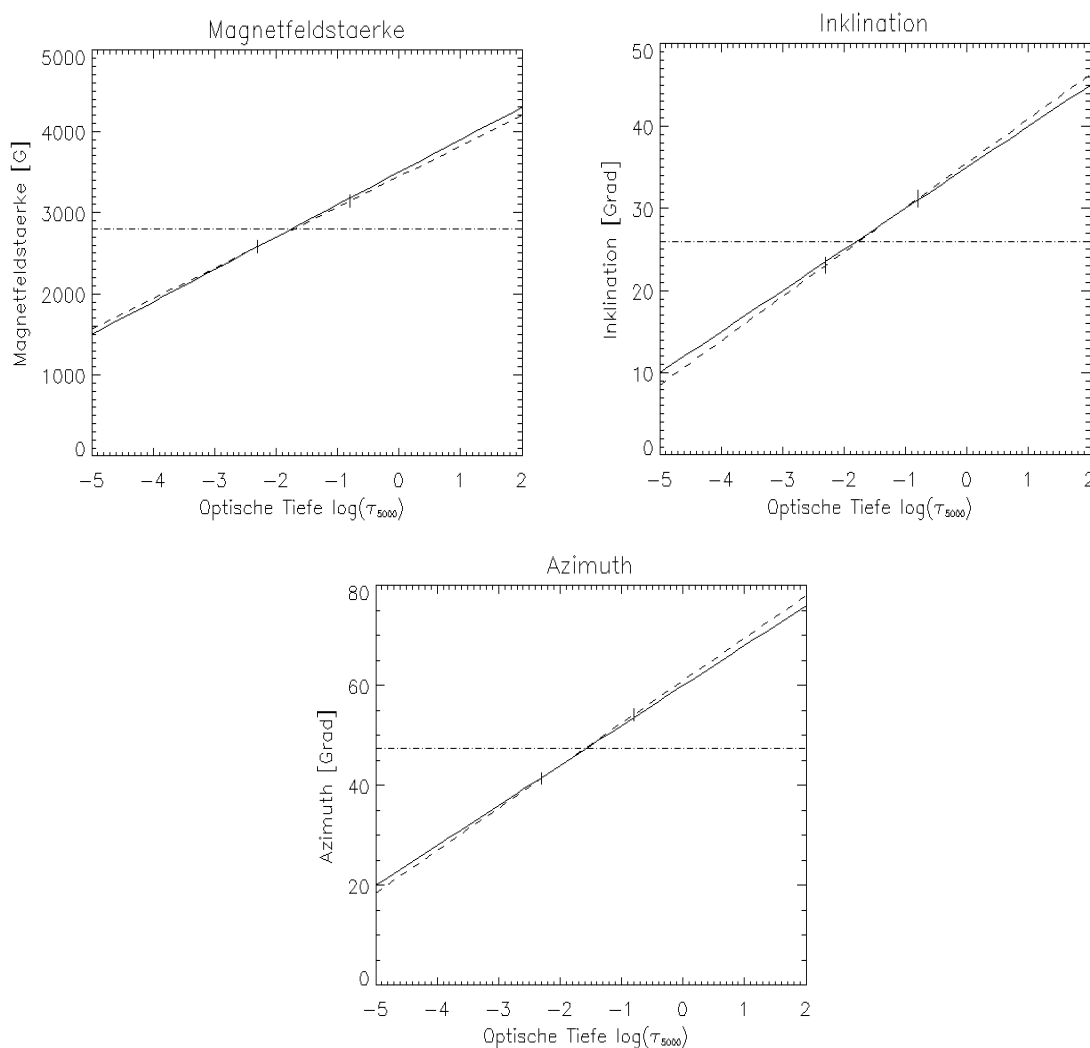


Abbildung 9.2 : Darstellung des Berechnungsergebnisses für Gradienten in der Magnetfeldstärke (links oben), der Inklination (rechts oben) und des Azimuts (unten). Die durchgezogene Linie entspricht dem vorgegebenen wahren Gradienten, die horizontale Punkt-Strichlinie entspricht dem Berechnungsergebnis des neuronalen Netzes und die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis der Inversion auf der Basis der Response-Funktionen.

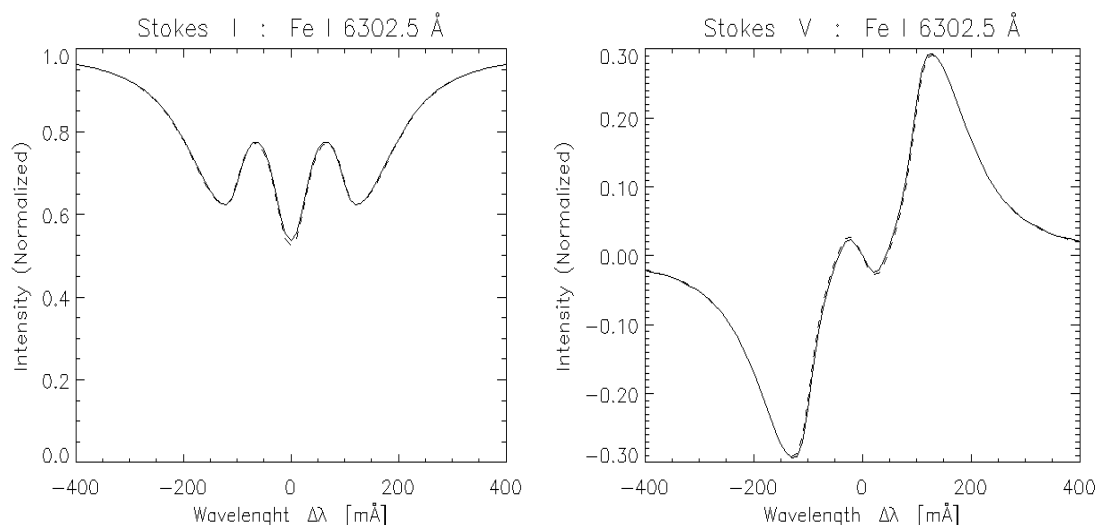


Abbildung 9.3 : Darstellung der Anpassungsgenauigkeit des Inversionsprogramms anhand der Stokes-I- und Stokes-V-Profile. Die durchgezogenen Profilkurven entsprechen den vorgegebenen Profilverläufen und die gestrichelten Linien den angepassten Stokes-Profilverläufen.

Die Ergebnisse zeigen zum einen, dass die berechneten Parameter (horizontale Punkt-Strichlinie) der neuronalen Netze sehr gute durchschnittliche Werte darstellen. In der Abbildung 9.2 rechts oben ist der vorgegebene Gradient der Magnetfeldstärke, 40 Gauss/ $\log(\tau)$  (durchgezogene Linie), angegeben. Der durch das Inversionsprogramm berechnete liegt bei 38,3 Gauss/ $\log(\tau)$  (gestrichelte Linie). Für die Inklination (links oben) war ein Gradient von  $5^\circ/\log(\tau)$  (durchgezogene Linie) vorgegeben, dieser wurde von dem Programm mit  $5,3^\circ/\log(\tau)$  (gestrichelte Linie) berechnet. Weiterhin ergab die Berechnung des Gradienten für den Azimut (unten), dass der vorgegebene Gradienten von  $8^\circ/\log(\tau)$  (durchgezogene Linie) mit  $8,4^\circ/\log(\tau)$  (gestrichelte Linie) durch das Inversionsprogramm gut wiedergegeben wird. In Abbildung 9.3 sind die zugehörigen Stokes-I und Stokes-V-Profile dargestellt, die zu den vorgegebenen (durchgezogene Linie) und zu den berechneten (gestrichelte Linie) Gradienten aus Abbildung 9.2 gehören.

In der folgenden Abbildung 9.4 sind rechts oben wieder die Ergebnisse des vorgegebenen und des berechneten Gradienten der Magnetfeldstärke zu sehen. Dabei war der vorgegebene Gradient 20 Gauss/ $\log(\tau)$  und der durch das Inversionsprogramm berechnete lag bei 18,9 Gauss/ $\log(\tau)$ . Für die Inklination wurde ein Gradient von  $2,7^\circ/\log(\tau)$  berechnet bei einem vorgegebenen Gradienten von  $2,5^\circ/\log(\tau)$ . Der Gradient des Azimuts wurde mit  $4,3^\circ/\log(\tau)$  berechnet bei einer Vorgabe von  $4^\circ/\log(\tau)$ . Abbildung 9.5 zeigt die zugehörigen Stokes-I- und Stokes-V-Profile für die vorgegebenen Gradienten (durchgezogene Linie) und der berechneten Gradienten (gestrichelte Linie).

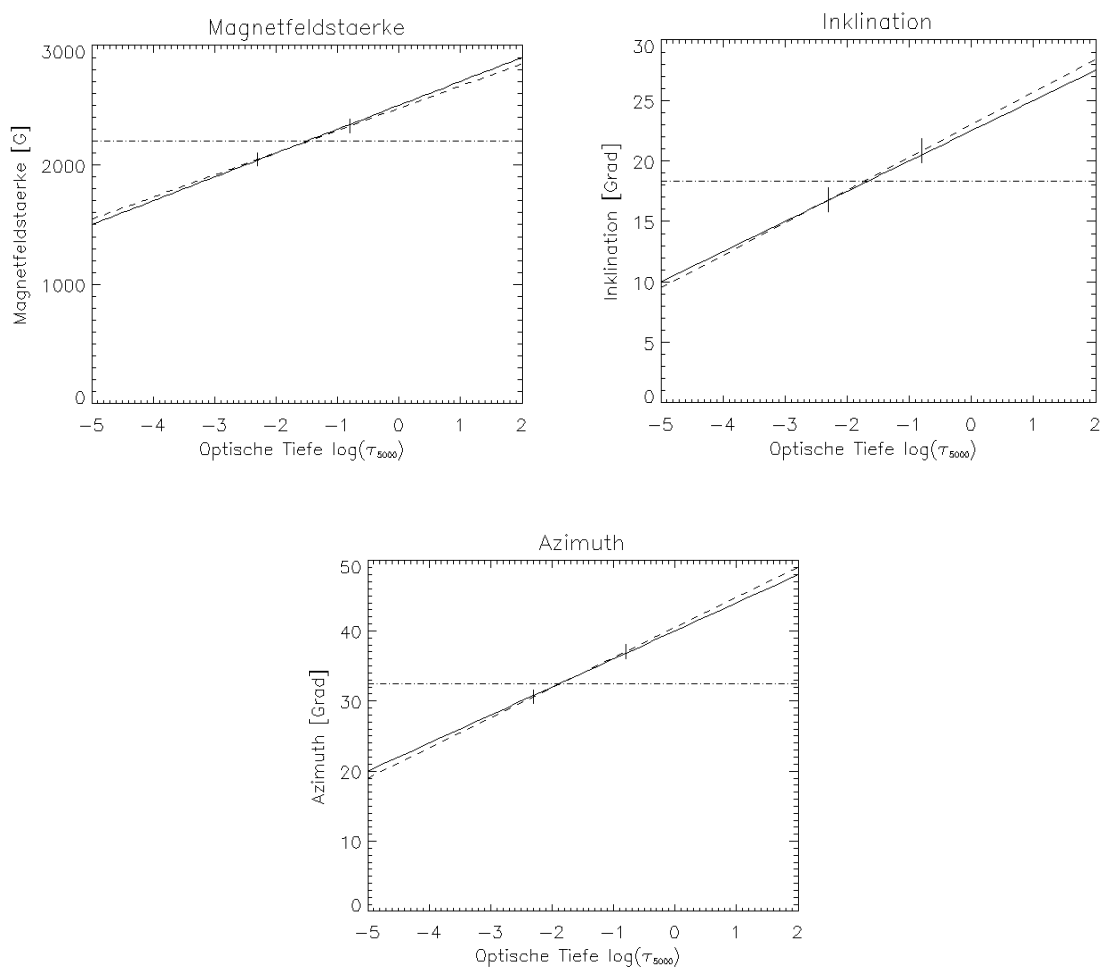


Abbildung 9.4 : Weitere Darstellung des Berechnungsergebnisses für einen Gradienten in der Magnetfeldstärke (links oben), der Inklination (rechts oben) und des Azimuts (unten). Die durchgezogene Linie entspricht wieder dem vorgegebenen wahren Gradienten, die horizontale Punkt-Strichlinie entspricht dem Berechnungsergebnis des neuronalen Netzes und die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis der Inversion auf der Basis der Response-Funktionen.

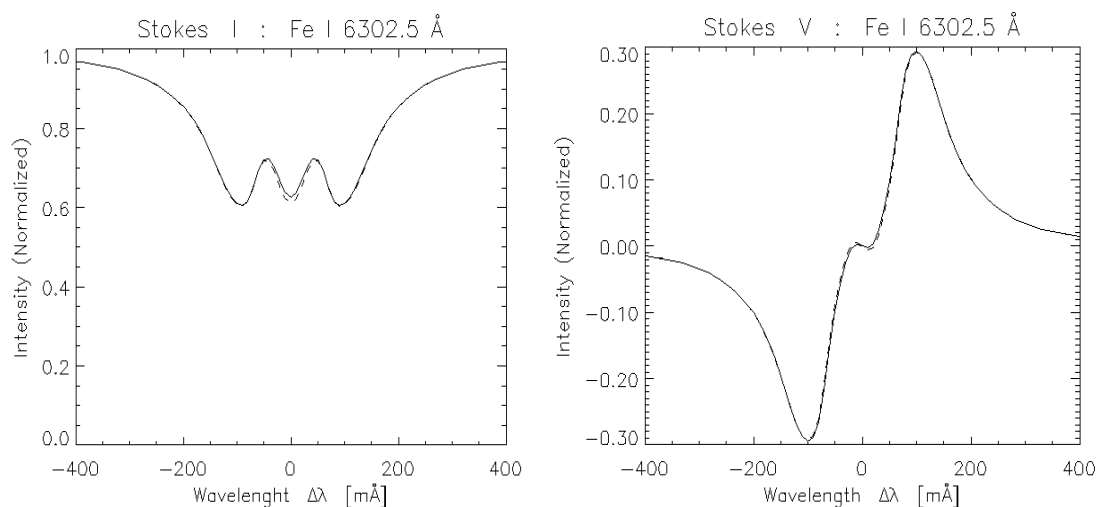


Abbildung 9.5 : Darstellung der Anpassungsgenauigkeit des Inversionsprogramms anhand der Stokes-I- und Stokes-V-Profile. Die durchgezogenen Profilkurven entsprechen den vorgegebenen Profilverläufen und die gestrichelten Linien den angepassten Stokes-Profilverläufen.

In den Abbildungen 9.2 und 9.4 sind für die jeweiligen Stützpunkte der Inversion Fehlerbalken eingetragen. Die Fehlerabschätzungen wurden anhand der in Kapitel 4 hergeleiteten approximierten Hessematrix gewonnen. Dazu wurde ausgehend von dem gefundenen Minimum der Zielfunktion  $\chi^2$  eine kleine Abweichung eines Parameters  $\delta a_i$  vorgenommen - alle anderen wurden festgehalten - und die Abweichung  $\Delta\chi^2$  der Zielfunktion untersucht. Unter der Annahme, dass die Zielfunktion sich in der Nähe des Minimum annähernd parabolisch verhält, lässt sich diese dort quadratisch entwickeln und ersetzen. Die führt zu

$$\frac{\chi_1^2 - \chi_0^2}{\chi_0^2} = \Delta\chi^2 = \mathbf{b} \delta\mathbf{a} + \delta\mathbf{a} \mathbf{A} \delta\mathbf{a}, \quad (9.10)$$

dabei ist  $\mathbf{b}$  wie in Kapitel 4 der Gradient der Zielfunktion und  $\mathbf{A}$  die approximierte Hessematrix. Ist durch den Levenberg-Marquardt-Algorithmus das Minimum der Zielfunktion erreicht, verschwinden die Komponenten erster Ordnung und eine Verschiebung der Zielfunktion (9.8) ist durch

$$\Delta\chi^2 = \delta\mathbf{a} \mathbf{A} \delta\mathbf{a} \quad (9.11)$$

gegeben. Wird nur die Verschiebung eines Parameters  $a_i$  betrachtet, folgt aus (9.9)

$$\delta a_i = \pm \sqrt{\Delta\chi^2 [A_{ii}]^{-1}}. \quad (9.12)$$

Nun ist die Chi-Quadrat-Verteilungsfunktion mit einem Freiheitsgrad gleich der quadratischen Normalverteilung einer einzelnen Größe (Press et. al. 1989). Wenn nun  $\Delta\chi^2 = 1$  gesetzt wird, entspricht dies also der Standardabweichung, und somit lässt sich mit der Gleichung

$$\delta a_i = \pm \sqrt{[A_{ii}]^{-1}} \quad (9.13)$$

eine Abschätzung des Fehlers durch die inverse approximierte Hessematrix geben, die dann ihrerseits durch die Produkte der jeweiligen Response-Funktionen berechnet wird. Die Fehlerabschätzung (9.13) wurde mit in das entwickelte Inversionsprogramm integriert.

Die in Abbildung 9.2 dargestellten Ergebnisse des Gradienten der Magnetfeldstärke ergaben für die beiden Stützstellen bei  $\log(\tau) = -2,3$  einen Fehler nach Gleichung (9.11) von  $\pm 51$  Gauss. Für den zweiten Stützpunkt bei  $\log(\tau) = -0,8$  ergab sich ein Fehler von  $\pm 56$  Gauss. Für die Inklination waren die ermittelten Stützpunkte bei  $\log(\tau) = -2,2$  und bei  $\log(\tau) = -0,8$  und zeigten dort einen Fehler gemäss (9.13) von jeweils  $1,3^\circ$ . Die Stützpunkte des Azimuts waren ebenfalls bei  $\log(\tau) = -2,2$  und  $\log(\tau) = -0,8$  und zeigten dort einen Fehler von  $\pm 1,2^\circ$  bzw.  $\pm 1,1^\circ$ . Bei der Untersuchung der Fehler der in Abbildung 9.4 gezeigten Ergebnisse zeigten



---

sich ähnliche Resultate sowohl für die Position der Stützstellen als auch für die Fehler. Diesen waren für die Magnetfeldstärke bei  $\log(\tau) = -2,4$  und  $\log(\tau) = -0,9$  und zeigten dort einen Fehler von  $\pm 55$  Gauss bzw.  $\pm 56$  Gauss. Für die Inklination ergaben sich die Stützpunkte  $\log(\tau) = -2,2$  und  $\log(\tau) = -0,8$  mit  $\pm 1,6^\circ$  bzw.  $\pm 1,5^\circ$ . Die Stützpunkte des Gradienten des Azimuts waren bei  $\log(\tau) = -2,2$  und  $\log(\tau) = -0,8$  und zeigten einen Fehler von jeweils  $\pm 1,2^\circ$ .

Die weiteren Untersuchungen verschiedener Konfigurationen des Gradienten für Magnetfeldstärke, Inklination und Azimut ergaben zum einen, dass die hier dargestellten sehr guten Ergebnisse bestätigt wurden und zum anderen, dass alle bisher berechneten Gradienten innerhalb des Bereiches liegen, der durch die Fehlerbalken der Stützpunkte gegeben ist. Bei den hier untersuchten linearen Gradienten zeigte sich besonders deutlich die gute Genauigkeit, mit der die neuronalen Netze in der Lage waren, gute Startparameter bzw. durchschnittliche Parameterwerte zu erzeugen. Diese wurden nicht nur außerordentlich schnell durch die jeweiligen neuronalen Netze berechnet und standen dann dem Inversionsprogramm zur Verfügung, sondern hatten auch positiven Einfluss auf die Berechnungsgeschwindigkeit sowie auf die Berechnungsgenauigkeit des Levenberg-Marquardt-Algorithmus. Dies ergab sich aus verschiedenen Tests mit und ohne Initialisierung durch die neuronalen Netze.

## 10 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Inversion von Stokes-Profilen auf der Basis von künstlichen neuronalen Netzen und Response-Funktionen entwickelt. Als Randbedingungen bestand dabei die Beschränkung auf die Inversion von Stokes-Profilen aus der Umbra von Sonnenflecken. Die Untersuchungen wurden dabei an synthetischen Absorptionslinien durchgeführt.

Dabei wurde in dieser Arbeit eine Kombination aus künstlichen neuronalen Netzen und einer konventionellen Inversionsmethode auf der Basis von Response-Funktionen entwickelt (Ruiz Cobo und del Toro Iniesta 1992). Die durch die neuronalen Netze berechneten Parameter stellen eine schnelle Approximation an die wahren atmosphärischen Parameter dar. Auf der Grundlage dieser Werte wird eine Anpassung des theoretischen Modells des Strahlungstransports an die gemessenen Stokes-Profilen durch den Levenberg-Marquardt-Algorithmus (Marquardt 1963) durchgeführt. Dabei kann nicht nur eine erhebliche Beschleunigung des Inversionsverfahren erreicht werden, auch lassen sich sichere Startparameter für den Levenberg-Marquardt-Algorithmus gewinnen, dessen Konvergenzeigenschaften und Genauigkeit dadurch positiv beeinflusst werden.

### 10.1 Klassifikation

Zunächst ist eine Bestimmung bzw. Klassifikation der Modellatmosphäre -  $T(\tau)$  und  $p(\tau)$  - anhand der Stokes-Profile durchgeführt worden. Dies erwies sich als sinnvoll, da gerade die Temperatur bzw. der Temperaturverlauf einen großen Einfluss auf das entstehende Stokes-Spektrum hat. Anfängliche Untersuchungen mit den neuronalen Netzen ergaben, dass diese eine weitaus bessere Adaption an das inverse Problem zeigten, sobald die Bestimmung des Temperaturverlaufs gesondert behandelt wurde. Aufgrund des dominierenden Einflusses der Temperatur auf den Strahlungstransport sowie das Adaptionsverhalten der neuronalen Netze konnte das Temperaturverhalten der Modellatmosphäre als eine der Hauptursachen für die schlechte Stellung, des inversen Problems identifiziert werden. Unter Berücksichtigung aller Parameter wurde so zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezüglich des Temperaturmodells durch ein Klassifikationsnetz ermittelt. Anhand von acht Modellatmosphären wurde verschiedene künstliche neuronale Netze als Klassifikatoren trainiert. Dasjenige mit dem besten Trainingsverhalten wurde ausgesucht und anschließend einer Untersuchung mit unbekanntem Stokes-Profilen unterzogen. Dabei zeigte sich, dass das neuronale Netz als Klassifikator in der Lage war, alle Stokes-Profilen, bestehend aus Stokes-I- und Stokes-V-Profilen, der richtigen Modellatmosphäre zuzuordnen (Kapitel 8.3.4). Auch die weiteren Untersuchungen mit verrauschten Profilen zeigten, dass die in den Stokes-Profilen enthaltene Information über die Modellatmosphäre erhalten bleibt. Aus den Untersuchungen kann nun folgende Schlussfolgerung gezogen werden :

- Aus dem guten Adaptionverhalten der neuronalen Netze während des Trainingsprozesse und der folgenden Analyse des Aussageverhaltens kann davon ausgegangen werden, dass in den Stokes-I- und Stokes-V-Profildaten der FeI Linie 5250,22 Å ausreichende Information über die jeweilige Modellatmosphäre enthalten ist.
- Die in den Stokes-Profildaten enthaltene funktionale Abhängigkeit lässt sich mit einem künstlichen neuronalen Netz erkennen. Darauf aufbauend lassen sich Wahrscheinlichkeitsaussagen über die zugrundeliegenden Modellatmosphären treffen.

Basierend auf diesen Fähigkeiten könnte in zukünftige Arbeiten die Anzahl der zu klassifizierenden Modellatmosphären erheblich erhöht werden, um so den realen Verhältnissen noch näher zu kommen. Dabei wäre es vorteilhaft, die Anzahl der zugrunde gelegten Absorptionslinien zu erhöhen, um die Aussagebereiche innerhalb der optischen Tiefe zu erweitern und die Genauigkeit der Berechnungen weiter zu erhöhen.

## 10.2 Inversion mit künstlichen neuronalen Netzen

Nach der Bestimmung der Modellatmosphäre wurden verschiedene neuronale Netze (Parameternetze) auf der Grundlage der jeweiligen Modellatmosphäre trainiert. Die neuronalen Netze wurden zum einen auf der Grundlage der Stokes-I- und Stokes-V-Profilen trainiert, um eine Bestimmung der Magnetfeldstärke, der Inklination, der Doppler-Geschwindigkeit und der Mikroturbulenz durchzuführen. Zum anderen wurden Parameternetzwerke zur Bestimmung des Azimuts entwickelt, die auf der Grundlage der Stokes-Q- und Stokes-U-Profildaten arbeiten. Die ausgesuchten Parameternetzwerke zeigten schon während des Trainingsprozesses eine sehr gute Adaption an das inverse Problem (Kapitel 8.4.3). Die anschließenden Tests der Parameternetzwerke mit unbekanntem Profildaten bestätigten die sehr gute Berechnungsgenauigkeit der Netzwerke (Kapitel 8.4.4). Den Parameternetzwerken wurden ebenfalls Stokes-Profildaten mit einem künstlichen Rauschen ( $S/N = 100$ ) präsentiert. Auch hier zeigten die Tests, dass die Berechnungsgenauigkeit weiterhin sehr gut blieb und nur sehr gering durch das Rauschen beeinflusst wurde.

Da die Parameternetzwerke auf der Grundlage homogener geschichteter Atmosphären für die Parameter Magnetfeldstärke, Inklination, Azimut, Doppler-Geschwindigkeiten und Mikroturbulenz trainiert wurden, geben die berechneten Werte auch nur einwertige Ergebnisse wieder. Um das Aussageverhalten der Parameternetze insbesondere auf Gradienten des Magnetfeldvektors hin zu untersuchen, wurden den Netzwerken verschiedene Stokes-Profile präsentiert, die unter geschichteten Atmosphären erzeugt wurden (Kapitel 8.5). Hierbei zeigte sich, dass die durch die Parameternetzwerke berechneten Parameter weitgehend aus den Höhen der Atmosphäre stammen, die nach Sanchez Almeida et. al. (1996) den Entstehungshöhen (height of formation) entsprechen, also aus den optischen

---

Tiefen, wo die jeweiligen Response-Funktionen der Parameter ihren größten Einfluss auf das entstehende Stokes-Spektrum haben. Folgende Schlussfolgerungen können aus den Ergebnissen der Inversion auf der Basis von neuronalen Netzen gezogen werden :

- Das inverse Problem der Bestimmung der atmosphärischen Parameter Magnetfeldstärke, Inklination, Azimut, Doppler-Geschwindigkeit und Mikroturbulenz aus den Stokes-Profilaten ist durch neuronale Netze berechenbar.
- Die Ergebnisse der neuronalen Netze zeigen deutlich, dass die in den Stokes-I- und Stokes-V-Profilaten der FeI-Line 6302,5 Å enthaltene Information ausreichend ist, um die Parameter Magnetfeldstärke, Inklination, Doppler-Geschwindigkeit und Mikroturbulenz zu bestimmen.
- Bei geschichteten Atmosphären stammen die durch die neuronalen Netze berechneten Parameterwerte weitgehend aus den Höhen, die nach Sanchez Almeida et. al. (1996) den Entstehungshöhen (height of formation) entsprechen.
- Die Berechnungen durch die neuronalen Netze im Anwendungsmodus, sowohl der Klassifikationsnetzwerke als auch der Parameternetzwerke, sind äußerst schnell. Die Inversion von 5000 Paaren von Stokes-I- und Stokes-V-Profilaten durch ein Netzwerk, beansprucht weniger als 11 Sekunden CPU-Zeit auf einer HP-9000 Workstation.

Durch die außerordentlich guten Ergebnisse der Inversion von synthetischen Stokes-Profilen mit neuronalen Netzen sollten zukünftige Ziele in der Bestimmung von weiteren atmosphärischen Parametern, z.B. der Makroturbulenz, sowie die Ermittlung von Gradienten liegen. Diese könnten zumindest in erster Ordnung für den Magnetfeldvektor bzw. für Doppler-Geschwindigkeiten bestimmt werden, um noch bessere Voraussetzungen für eine anschließende Inversion auf der Basis von Response-Funktionen, zu schaffen. Weiterhin sollte, wie bereits bei den Klassifikationsnetzwerken, die Anzahl der untersuchten Absorptionslinien erhöht werden, um die Aussagebereiche entlang der optischen Tiefe zu erweitern und die Genauigkeit der Berechnungen weiter zu erhöhen.

Im Hinblick auf die Problematik der Berechnung von inversen Problems mit künstlichen neuronalen Netzen wäre die Untersuchung von neuen Netzwerktypen eine weitere interessante Zielstellung für zukünftige Arbeiten. Insbesondere das von Bishop (1994) speziell für inverse Probleme vorgeschlagene Modell des „Mixture Density Network“, das eine gezielte probabilistische Untersuchung des Parameterraums ermöglicht, sollte bezüglich der Inversion von Stokes-Parametern untersucht werden.

### 10.3 Inversion mit Response-Funktionen

Die durch die neuronalen Netze gewonnenen Parameter dienen als Initialisierung des Levenberg-Marquardt-Algorithmus, der auf der Basis der Response-Funktionen für Stokes-Parameter arbeitet. Inversionsverfahren auf der Basis von Response-Funktionen stellen heutzutage die fortschrittlichste und genaueste Methode dar, Stokes-Profildaten zu analysieren (Frutiger, Solanki und Fligge 1999). Gerade die Initialisierung ist bei der Verwendung dieses Verfahrens von besonderer Bedeutung. Der Levenberg-Marquardt-Algorithmus ist als Verfahren zweiter Ordnung in seinem Konvergenzverhalten besonders abhängig von den Startwerten. Die konventionelle Inversion dient zum einen als Prüfung der durch die neuronalen Netze generierten Ergebnisse, und zum anderen wurden mit Hilfe der Response-Funktionen die Gradienten der Magnetfeldstärke, der Inklination und des Azimuts bestimmt. Die in Kapitel 5 linearisierte Strahlungstransportgleichung und die daraus abgeleiteten Response-Funktionen für die drei Magnetfeldparameter wurden in das Strahlungstransportprogramm DIAMAG implementiert und dann mit Hilfe der DELO-Methode numerisch berechnet. Die erzielten Ergebnisse, die mit synthetischen Stokes-Profildaten erzielt wurden, waren sehr gut. In allen Fällen konvergierte das Inversionsverfahren. Dabei stellte sich heraus, dass gerade die guten Startwerte, die durch die neuronalen Netze geliefert wurden, zu einer zusätzlichen Beschleunigung der Inversion beitrugen. Die Inversion wurde für Gradienten mit linearer Schichtung durchgeführt. Dabei wurden alle vier Stokes-Parameter vom Inversionsprogramm benutzt. Bei allen untersuchten Profildaten stellten die durch die neuronalen Netze berechneten Werte sehr gute durchschnittliche Parameterwerte dar. Die durchgeführten Inversionen konnten mit sehr guter Genauigkeit die vorgegebenen Gradienten aus den synthetischen Stokes-Profilen bestimmen. Folgenden Schlussfolgerungen können aus der Kopplung von künstlichen neuronalen Netzen und der Inversion auf der Basis von Response-Funktionen gestellt werden:

- Durch die Kopplung von Klassifizierung und Parameterberechnung durch die neuronalen Netze mit der Inversion auf der Basis von Response-Funktionen wird die Inversion von Stokes-Profildaten wesentlich beschleunigt sowie die Konvergenz und die Genauigkeit der Berechnung verbessert.
- Response-Funktionen bieten über die Wahrscheinlichkeitsinterpretation eine gute Abschätzung über den Wirkungsbereich der jeweiligen Parameter auf das Stokes-Spektrum. Dies konnte in Kapitel 9 für die Berechnung der Magnetfeldgradienten genutzt werden.

Aufgrund der bestehenden Problematik, dass herkömmliche Inversionsverfahren große Datenmengen, z.B. bei großräumigen Aufnahmen über magnetisch aktive Gebiete der Sonne mit hoher Auflösung, nur unter sehr großem Zeitaufwand analysieren können, stellt die

---

Kombination von künstlichen neuronalen Netzen und fortschrittlicher Inversionsmethodik mittels Response-Funktionen, eine vielversprechende Alternative dar.

Zukünftig sollte die Inversion gemessener Stokes-Profile als realistischer Test dieser neuen Methodik durchgeführt werden. Weithin sollten die Inversion dahingehend erweitert werden, dass neben den Gradienten der Magnetfeldparameter zusätzliche Gradienten anderer Parameter bestimmt werden können. Gerade im Hinblick auf die Inversion mehrerer Parameter in einer geschichteten Atmosphäre sollten zusätzliche Regularisierungsverfahren wie die Tikhonov-Regularisierung (Tikhonov und Arsenin 1977) mit in das Inversionsverfahren integriert werden. Weiterhin könnte der herkömmliche Ansatz über das lokale Verfahren des Levenberg-Marquardt-Algorithmus durch eine weiteren Methode der künstlichen Intelligenz ergänzt werden. Hierzu zählen neben den in dieser Arbeit benutzten künstlichen neuronalen Netze die genetischen Algorithmen. Diese besitzen unter anderem die Eigenschaft, eine nichtlokale Optimierung in hochdimensionalen Räumen zu ermöglichen, und gestatten somit eine weiterreichende Untersuchung des Parameterraums.

# 11 Anhang

## 11.1 Die numerische Berechnung des Evolutions-Operator

Im folgenden wird der Ausdruck für die numerische Berechnung des Evolutions-Operator hergeleitet. Dieser wird für die Berechnung der Response-Funktionen benötigt und lässt sich parallel zur Integration der Strahlungstransportgleichung gewinnen. Der Diagonal-Lambda-Operator-Methode (DELO) von Rees, Murphy und Durrant (1989) folgend sind die Diagonalelemente der totalen Absorptionsmatrix  $\mathbf{K}$  (3.42) gegeben durch

$$\kappa_l = \kappa_c + \kappa_l \psi_l . \quad (11.1)$$

Mit der Definition der optischen Tiefe  $\tau$  entlang der Sichtlinie  $z$ , so dass

$$d\tau = -\kappa_l dz \quad (11.2)$$

und der Einführung der modifizierten totalen Absorptionsmatrix  $\mathbf{K}'$

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} / \kappa_l - \mathbf{I} , \quad (11.3)$$

wobei diese dann Nullelemente in der Diagonalen besitzt, sowie der Einführung der modifizierten Quellfunktion  $\mathbf{S}'$

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} / \kappa_l , \quad (11.4)$$

lässt sich die Strahlungstransportgleichung (3.55) schreiben als

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}} , \quad (11.5)$$

dabei ist

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}' - \mathbf{K}\mathbf{I} . \quad (11.6)$$

Im folgenden sind mit  $\tau_k$  die Integrationspunkte entlang der optischen Tiefe gekennzeichnet. In dem Intervall  $(\tau_k, \tau_{k+1})$  ist die Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$\mathbf{I}(\tau_k) = E_k \mathbf{I}(\tau_{k+1}) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{-(\tau - \tau_k)} \tilde{\mathbf{S}}(\tau) d\tau \quad (11.7)$$

gegeben, wobei  $E_k$  durch

$$E_k = e^{-\delta_k} \text{ gegeben ist und } \delta_k \text{ durch } \delta_k = \tau_{k+1} - \tau_k. \quad (11.8)$$

Um die Integralgleichung (11.7) zu lösen und eine Beziehung zwischen  $\mathbf{I}(\tau_k)$  und  $\mathbf{I}(\tau_{k+1})$  zu erhalten, wird im Intervall  $(\tau_k, \tau_{k+1})$   $\tilde{\mathbf{S}}$  linear approximiert, durch

$$\tilde{\mathbf{S}}(\tau) = \frac{(\tau_{k+1} - \tau)\tilde{\mathbf{S}}_k + (\tau - \tau_k)\tilde{\mathbf{S}}_{k+1}}{\delta_k}. \quad (11.9)$$

Nun kann Gleichung (11.6) analytisch integriert werden und man erhält, geschrieben in kompakter Darstellung, die folgende Beziehung

$$\mathbf{I}(\tau_k) = \mathbf{P}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{I}(\tau_{k+1}), \quad (11.10)$$

wobei  $\mathbf{P}_k$  und  $\mathbf{L}_k$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= [\mathbf{I} + (\mathbf{F}_k - \mathbf{G}_k)\mathbf{K}'_k]^{-1} [(\mathbf{F}_k - \mathbf{G}_k)\mathbf{S}'_k + \mathbf{G}_k \mathbf{S}'_{k+1}] \text{ und} \\ \mathbf{L}_k &= [\mathbf{I} + (\mathbf{F}_k - \mathbf{G}_k)\mathbf{K}'_k]^{-1} (\mathbf{E}_k \mathbf{I} - \mathbf{G}_k \mathbf{K}'_{k+1}) \end{aligned} \quad (11.11)$$

gegeben sind und  $\mathbf{F}_k$  und  $\mathbf{G}_k$  durch

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k &= \mathbf{I} - \mathbf{E}_k \\ \mathbf{G}_k &= \frac{\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \delta_k)\mathbf{E}_k}{\delta_k}, \end{aligned} \quad (11.12)$$

ausgedrückt werden.

Anhand der Gleichung (11.10) und der formalen Lösung des polarisierten Strahlungstransports (3.60)

$$\mathbf{I}(0) = \int_0^{\infty} \mathbf{O}(0, \tau) \mathbf{K}(\tau) \mathbf{S}(\tau) d\tau,$$



---

lässt sich der Evolutions-Operator identifizieren. Woraus sich folgende Beziehung ergibt

$$\mathbf{O}(\tau_k, \tau_{k+l}) = \mathbf{L}_k. \quad (11.13)$$

Auf diese Weise lässt sich der Evolutions-Operator innerhalb der Diagonal-Lambda-Operator-Methode berechnen und simultan zur Integration der Strahlungstransportgleichung, kann die Berechnung der Response-Funktionen erfolgen .

---

## 12 Literaturverzeichnis

- Auer, L.H., Heasley, J.M., House, L.L.: 1977, *Solar Physics* 55, 47.
- Beckers, J.M., Milkey, R.W.: 1975, *Solar Physics* 43, 289.
- Bishop, C.M.: 1994, *Neural Computing Research Report* NCRG/94/004, Aston University
- Collados, M., Martinez Pillet, V., Ruiz Cobo, B., del Toro Iniesta, J.C., Vazquez, M.: 1994, *Astron. Astrophys.* 291, 622.
- Frutiger, C., Solanki, S.K., Fligge, M.: 1999, *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Solar Polarization Workshop: Solar Polarization* 281-290, Kluwer Academic Publishers
- Gingerich, O., Noyes, R.W., Kalkhofen, W., Cuny, Y.: 1971, *Solar Physics* 18, 347
- Grossberg, S.: 1988, *Nonlinear neural Networks*, Neural Networks Vol. 1, 17.
- Grossmann-Doerth, U.: 1994, *Astron. Astrophys.* 285, 1012.
- Hecht-Nielsen, R.: 1990, *Neurocomputing*, Addison-Wesley, Reading.
- Holmes, J.: 1991, *Sprachsynthese und Spracherkennung*, Oldenbourg, München.
- Holweger, M., Müller, E.A.: 1974, *Solar Physics* 39, 19.
- Hornik, K., Stinchcombe, M., White, H.: 1989, *Multilayer feedforward Networks are universal Approximators*, Neural Networks 2,359.
- Hornik, K.: 1991, *Approximation capabilities of multilayer perceptrons*, Neural Networks 4, 251.
- Jeffrey, W., Rosner, R.: 1986, *Astrophys. J.* 310, 473
- Judd, J.S.: 1990, *Neural Network Design and the Complexity of Learning*, MIT Press Cambridge, Massachusetts.
- Kollatschny, W., Wiehr, E., Stellmacher, G., Falipou, M.A.: 1980, *Astron. Astrophys.* 86, 245.
- Landi Degl'Innocenti, E.: 1976, *Astron. Astrophys. Suppl.* 25, 379.
- Landi Degl'Innocenti, E., Landi Degl'Innocenti, M.: 1977, *Astron. Astrophys.* 56, 111.
- Landi Degl'Innocenti, E.: 1982, *Solar Physics* 77, 13.

- 
- Landi Degl'Innocenti, E.: 1987, *Numerical Radiative transfer*, Cambridge University Press, p.265.
- Landolfi, M., Landi Degl' Innocenti, E., Arena, P.: 1984, *Solar Physics* 93, 269.
- Louis, A.K.: 1989, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- Maltby, P., Avrete E.H., Carlson, M., Kjeldseth-Moe, O., Kurucz, R.L., Loeser, R.: 1986, *Astrophys. J.* 306, 284.
- Marquardt, D.W. : 1963, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 11, 431.
- Mihalas, D.: 1978, *Stellar Atmospheres*, Freeman and Company, San Francisco.
- Pizzo, V.J.: 1986, *Astrophys. J.* 302, 785.
- Polak, E. : 1971, *Computational Methods in Optimization*, New York Academic Press..
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, A.T.: 1989, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge
- Rachkovsky, D.N.: 1962, *Izv. Krymsk. Astrofiz. Obs.* 27, 148.
- Rees, D.E., Murphy, G.A., Durrant, C.J.: 1989, *Astrophys. J.* 339, 1039.
- Richard, M.D., Lippmann, R.P.: 1991, *Neural Network Classifiers Estimate Bayesian a posteriori Probabilities*, *Neural Computation* 3, 461.
- Rojas, R.: 1993, *Theorie der neuronalen Netze*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Ruiz Cobo, B., del Toro Iniesta, J.C.: 1994, *Astron. Astrophys.* 283, 129.
- Ruiz Cobo, B., del Toro Iniesta, J.C.: 1996, *Solar Physics* 164, 169.
- Rumelhart, M., McClelland, J.: 1986, *Parallel Distributed Processing*, MIT Press, Cambridge.
- Sanchez Almeida, J., Ruiz Cobo, B., det Toro Iniesta, J.C.: 1996, *Astron. Astrophys.* 314, 295.
- Scheffler, H., Elsässer, H.: 1990, *Physik der Sterne und der Sonne*, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim.
- Shurcliff, W.A.: 1962, *Polarized Light: Production and Use*, Harvard University Press.
- Skumanich, A., Lites, B.W.: 1987, *Astrophys. J.* 332, 473.
- Solanki, S.K.: 1987, *PhD. Thesis*, No. 8309, ETH Zürich.

- 
- Sprecher, D.: 1964, *Transaction of the Am. Math. Soc.* Vol. 115, 340.
- Stenflo, J.O.: 1994, *Solar Magnetic Fields*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Staude, J.: 1972, *Solar Physics* 24, 255.
- Staude, J.: 1981, *Astron. Astrophys.* 100, 284.
- Staude, J.: 1996, *Solar Physics* 164, 183.
- Stix, M.: 1989, *The Sun*, Springer Verlag, Heidelberg.
- Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y.: 1977, *Solutions of ill-posed problems*, V.H. Winston and Sons, Washington D.C.
- Unno, W.: 1956, *Publ. Astron. Soc. Japan* 8, 108
- Westendorp Plaza, C., del Toro Iniesta, J.C., Ruiz Cobo, B., Martinez Pillet, V.: 1998, *Astrophys. J.* 494, 453.
- Wittmann, A.: 1974, *Solar Physics* 35, 11.
- Ye Shi-Hui, E.: 1994, *Magnetic Fields of Celestial Bodies*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Zell, A.: 1994, *Simulation Neuronaler Netze*, Addison Wesley, New York.